STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 6 vastaukset (19.10.)

1.

a) Odotusarvo ja varianssi eivät välttämättä ole olemassa, jolloin niitä ei voi kuvata muuttumattomiksi kuten määritelmässä tehdään.

b) Kuvaus antaa ymmärtää, että heikko stationaarisuus seuraisi eli olisi "heikompaa" stationaarisuutta kuin tiukka stationaarisuus. Se ei pidä paikkaansa. On olemassa tiukasti stationaarisia prosesseja, jotka eivät ole heikosti stationaarisia (ja päin vastoin). Esimerkki1: IID Cauchy-jakautunut satunnaismuuttuja, jolla ei ole momentteja lainkaan. Esimerkki 2 ("klassinen"): integroitunut GARCH-prosessi (ks. Hamilton, 1994, s. 667 tai alkuperäisartikkeli D.B. Nelson (1990), *Econometric Theory*, 6, s:t 318-334).

2.

a) Prosessi ei ole kääntyvä. Se olisi kääntyvä jos yhtälön

$$1 + \theta z = 0$$

(yhtälö [3.7.13] tilanteessa $q = 1$) juuri olisi yksikköympyrän ulkopuolella. Yhtälön juuri on $z = -\theta^{-1}$, joka sijaitsee yksikköympyrän sisäpuolella, kun $|\theta| > 1$. Prosessi on heikosti stationaarinen vaikkei ole kääntyvä (ks. HT 3.3 a)).

b)

$$\begin{aligned}
y_t &= \theta(y_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t \\
&= \theta y_{t-1} - \theta^2(y_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t \\
&= \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + \theta^3(y_{t-3} - \theta\varepsilon_{t-4}) + \varepsilon_t \\
&= \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + \theta^3 y_{t-3} - \theta^4 y_{t-4} - (\theta\varepsilon_{t-5}) + \varepsilon_t \\
&\vdots\ \sum_{i=0}^{t-1} -(-\theta)^{i+1} y_{t-1-i} - (-\theta)^{t+1}\varepsilon_{-1} + \varepsilon_t.
\end{aligned}$$

c) Jos $|\theta| > 1$, niin kaukaisten y_t:n painot ovat suurempia kuin läheisten (yhtäsuuria jos $\theta = 1$). Samoin kaukainen innovaatio vaikuttaa suuremmalla painolla y_t:hen kuin uusi (yhtäsuurella jos $\theta = 1$). Empiirisesti olisi erikoista, että kaukaisella menneisyydellä olisi enemmän merkitystä kuin läheisellä, joten yhtälön (5) mukainen tilanne on epäintuitiivinen ja empiirisesti epäuskottava.

Termi $-(-\theta)^{t+1}\varepsilon_{-1}$ ei häviä aikaindeksin t kasvaessa kohti ääretöntä. Näin ollen rekursiivinen sijoittaminen ja aikaindeksin t kasvattaminen kohti ääretöntä eivät tuota AR(∞)-esityksen MA(1)-prosessille (4). Jos pätisi $|\theta| < 1$, niin termi

$-(-\theta)^{t+1}\varepsilon_{-1}$ suppenesi kohti nollaa t:n kasvaessa ja prosessilla olisi AR(∞)-esitys (kohti nollaa suppenevilla AR-kertoimilla).

4.

a)

$$\begin{aligned}
\psi(L) &= [\phi(L)]^{-1}\theta(L) && \Leftrightarrow \\
\theta(L) &= \\
1+\theta_1 L+\cdots+\theta_q L^q &= \phi(L)\psi(L) && \Leftrightarrow \\
&= (1-\phi_1 L-\cdots-\phi_p L^p)(\psi_0+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\cdots) \\
&= \psi_0+(\psi_1-\phi_1\psi_0)L+(\psi_2-\phi_1\psi_1-\phi_2\psi_0)L^2 \\
&\quad +(\psi_3-\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1-\phi_3\psi_0)L^3 \\
&\quad \vdots \\
&\quad +(\psi_j-\phi_1\psi_{j-1}-\cdots-\phi_{j-1}\psi_1-\phi_j\psi_0)L^j \\
&\quad +\cdots && \Longrightarrow
\end{aligned}$$

Verrataan kertoimia L:n potenssien edessä:

$$\psi_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\psi_j-\phi_1\psi_{j-1}-\cdots-\phi_{j-1}\psi_1-\phi_j\psi_0 &= \theta_j && \Leftrightarrow \\
\psi_j &= \theta_j+\phi_1\psi_{j-1}+\cdots+\phi_{j-1}\psi_1+\phi_j\psi_0. && \ldots
\end{aligned}$$

Selvästikin $\psi_0 = 1$, $\psi_j = \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i\psi_{j-i}$, $j = 1,\ldots,q$,
$\psi_j = \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i\psi_{j-i}$, $j > q$.

Yksityiskohtaisempi vastaus:

$$\begin{aligned}
\psi(L) &= [\phi(L)]^{-1}\theta(L) && \Leftrightarrow \\
\theta(L) &= \\
1+\theta_1 L+\cdots+\theta_q L^q &= \phi(L)\psi(L) && \Leftrightarrow \\
&= (1-\phi_1 L-\cdots-\phi_p L^p)(\psi_0+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\cdots) \\
&= \psi_0+(\psi_1-\phi_1\psi_0)L+(\psi_2-\phi_1\psi_1-\phi_2\psi_0)L^2 \\
&\quad +(\psi_3-\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1-\phi_3\psi_0)L^3 \\
&\quad \vdots \\
&\quad +(\psi_p-\phi_1\psi_{p-1}-\cdots-\phi_{p-1}\psi_1-\phi_p\psi_0)L^p \\
&\quad +(\psi_{p+1}-\phi_1\psi_p-\cdots-\phi_p\psi_1-\phi_{p+1}\psi_0)L^{p+1} \\
&\quad +\cdots
\end{aligned}$$

Oletetaan, että $q \geq p$ (jos tosiasiassa $q < p$, niin yksinkertaisesti merkitään alla $\theta_{q+1} = \ldots = \theta_p = 0$). Verrataan kertoimia L:n potenssien edessä:

$$\psi_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} \psi_1 - \phi_1\psi_0 \overset{\psi_0=1}{=} \psi_1 - \phi_1 &= \theta_1 \quad \Leftrightarrow \\ \psi_1 &= \theta_1 + \phi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 &= \theta_2 && \Leftrightarrow \\ \psi_2 &= \theta_2 + \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 &= \theta_3 && \Leftrightarrow \\ \psi_3 &= \theta_3 + \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3\psi_0, \quad \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{p-1} - \phi_1\psi_{p-2} - \cdots - \phi_{p-2}\psi_1 - \phi_{p-1}\psi_0 &= \theta_{p-1} \quad \Leftrightarrow \\ \psi_{p-1} &= \theta_{p-1} + \phi_1\psi_{p-2} + \cdots + \phi_{p-2}\psi_1 + \phi_{p-1}\psi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_p - \phi_1\psi_{p-1} - \cdots - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0 &= \theta_p && \Leftrightarrow \\ \psi_p &= \theta_p + \phi_1\psi_{p-1} + \cdots + \phi_{p-1}\psi_1 + \phi_p\psi_0, \quad \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_q - \phi_1\psi_{q-1} - \cdots - \phi_{q-1}\psi_1 - \phi_q\psi_0 &= \theta_q && \Leftrightarrow \\ \psi_q &= \theta_q + \phi_1\psi_{q-1} + \cdots + \phi_{q-1}\psi_1 + \phi_q\psi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{q+1} - \phi_1\psi_q - \cdots - \phi_q\psi_1 - \phi_{q+1}\psi_0 &= 0 && \Leftrightarrow \\ \psi_{q+1} &= \phi_1\psi_q + \cdots + \phi_q\psi_1 + \phi_{q+1}\psi_0 \end{aligned}$$

jne. Selvästikin $\psi_0 = 1$, $\psi_j = \theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i\psi_{j-i}$, $j = 1, \ldots, q$,
$\psi_j = \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i\psi_{j-i}$, $j > q$.

Kaavan [1.2.9] mukaan p. asteen differenssiyhtälön

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} \cdots \phi_p y_{t-p} + w_t$$

ratkaisu voidaan esittää avoimessa muodossa

$$\boldsymbol{\xi}_{t+j} = F^{j+1}\boldsymbol{\xi}_{t-1} + F^j\mathbf{v}_t + F^{j-1}\mathbf{v}_{t+1} + \ldots + F\mathbf{v}_{t+j-1} + \mathbf{v}_{t+j},$$

jossa $\xi_t = [y_t\ y_{t-1} \ldots y_{t-p+1}]'$ ja $v_t = [w_t\ 0 \ldots 0]'$. Kohdan a) mukaan AR(p)-prosessin MA(∞)-esityksen ψ_j-kertoimet noudattavat samaa p. asteen dif fe rens siyhtälöä kuin itse prosessi, kun $j > p$. Helposti nähdään, että ψ_j-kertoimet noudattavat samaista differenssiyhtälöä j:n arvosta 2 lähtien alkuarvoina $\psi_0 = 1$ ja $\psi_{-1} = \psi_{-2} = \cdots = \psi_{-p+1} = 0$. (Tehtävästä 2.3: $\psi_1 = \theta_1 + \phi_1\psi_0|_{\theta_1=0} = \phi_1$,

$\psi_2 = \theta_2 + \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0|_{\theta_2=0} = \phi_1\psi_1 + \phi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$ jne.) Valitaan yllä $t = 0$, $y_{t+j} = \psi_j$, $w_0 = 1$ ja $w_{0+i} = 0$, kun $i \neq 0$. Näillä määritelmillä $\boldsymbol{\xi}_{-1} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{v}_{t+i} = \mathbf{0}$, kun $i \neq 0$. Kaava [1.2.6] typistyy yhtälöksi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_j &\overset{\mathbf{v}_{t+i}=\mathbf{0},\mathbf{i}\neq 0}{=} F^{j+1}\boldsymbol{\xi}_{-1} + F^j\mathbf{v}_0 \\ &\overset{\boldsymbol{\xi}_{-1}=\mathbf{0}}{=} F^j\mathbf{v}_0,\end{aligned}$$

joka on kysytty muoto.

Tulkintaa: kaava [1.2.9] on yleisen p. asteen differenssiyhtälön avoin ratkaisu, joten sen avulla ratkeaa myös p. asteen differenssiyhtälöä noudattavien ψ_j-kertoimien aikaura.

5. Rekursiivisesti sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}y_t &= c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= c(1+\phi) + \phi(c + \phi y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= c\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{t-i} + \sum_{i=1}^{t}\phi^{t-i}\varepsilon_i \\ &= c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{t}\phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0.\end{aligned}$$

$((1-\phi)\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{t-i} = 1 - \phi^t.)$

a)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(y_t) &= \mathsf{E}(c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{t}\phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0) \\ &= c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \phi^t y_0.\end{aligned}$$

Odotusarvo ei ole vakio — ellei y_0 satu olemaan $c/(1-\phi) = \mu$ eli prosessin pitkän aikavälin odotusarvo. Tällöin $\mathsf{E}(y_t)|_{y_0=c/(1-\phi)} = c/(1-\phi)$. Tällöinkään y_t:n varianssi ei ole vakio:

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(y_t)|_{y_0=c/(1-\phi)} &= \mathsf{E}(c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{t}\phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t\frac{c}{1-\phi} - \frac{c}{1-\phi})^2 \\ &= \mathsf{E}(\sum_{i=1}^{t}\phi^{t-i}\varepsilon_i)^2 \\ &= \sigma^2\sum_{i=1}^{t}\phi^{2(t-i)} \\ &= \sigma^2\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}.\end{aligned}$$

Prosessi ei ole stationaarinen — edes silloin kun prosessi on alkanut odotusarvostaan $c/(1-\phi)$. Huomataan kuitenkin, että sekä odotusarvo että varianssi konvergoivat vakioon t:n mennessä äärettömään ($|\phi| < 1$). Aikasarja siis ”stationarisoituu” (is asymptotically stationary).

b) Odotusarvo on vakio ($c = 0$, joten $\mathsf{E}(y_0) = c/(1-\phi) = 0$):

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(y_t) &= \mathsf{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ennen y_t:n varianssin laskua huomataan, että $\mathsf{var}(y_0)$=$\mathsf{E}(y_0^2)$. Lasketaan varianssi:

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}(y_t) &= \mathsf{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0)^2 \\
&\overset{\perp}{=} \sigma^2 \textstyle\sum_{i=1}^{t} \phi^{2(t-i)} + \phi^{2t}\dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \sigma^2 \dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} + \phi^{2t}\dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}.
\end{aligned}$$

Myös varianssi on vakio.

Autokovarianssit (määritellyt – havaintoja on vain rajallinen määrä) ovat myös vakioita:

$$\begin{aligned}
\gamma_j\big|_{c=0} &\overset{c=0}{=} \mathsf{E}(y_t y_{t-j}) \\
&= \mathsf{E}[(\textstyle\sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0)(\sum_{i=1}^{t-j} \phi^{t-j-i}\varepsilon_i + \phi^{t-j} y_0)] \\
&\overset{\perp}{=} \sigma^2 \textstyle\sum_{i=1}^{t-j} \phi^{2(t-i)-j} + \phi^{2t-j}\dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \phi^{-j}\sigma^2 \textstyle\sum_{i=1}^{t-j} \phi^{2(t-i)} + \phi^{2t-j}\dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \phi^{-j}\phi^{2j}\sigma^2 \textstyle\sum_{i=0}^{t-1-j} \phi^{2i} + \phi^{2t-j}\dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \phi^j \sigma^2 \left[\dfrac{1-\phi^{2(t-j)}}{1-\phi^2} + \phi^{2t-j}\dfrac{1}{1-\phi^2}\right] \\
&= \phi^j \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}.
\end{aligned}$$

Odotusarvo, varianssi ja autokovarianssit ovat vakioita, joten prosessi on heikosti stationaarinen.

Johtopäätökset: Prosessi voi olla epästationaarinen kiinteän alkuarvon takia vaikka $|\phi| < 1$. Tällöin kuitenkin prosessi "stationarisoituu" havaintomäärän mennessä äärettömään. Jos alkuarvo noudattaa samaa jakaumaa kuin itse prosessi, niin prosessi on stationaarinen vaikka sitä on tuotettu vain äärellinen aika.