STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 5 vastaukset (12.10.)

1.

a) Osoitetaan, että AR(2)-prosessin

$$y_t = (1/3)y_{t-1} + (2/9)y_{t-2} + \varepsilon_t$$

karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2 - (1/3)\lambda - 2/9 = 0$$

juuret ovat kompleksitasoon piirretyn yksikköympyrän sisäpuolella eli että juuret ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi. Stationaarisuus seuraa tästä (kirjan s. 58). (Toinen vaihtoehto olisi johtaa AR(2)-prosessin MA(∞)-esitys ja sen avulla prosessin ensimmäiset ja toiset momentit ja todeta ne vakioiksi.)

Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$\begin{aligned}
\lambda_1,\lambda_2 &= \frac{1/3 \pm \sqrt{(1/3)^2 + 4(2/9)}}{2} \\
&= \frac{1/3 \pm 1}{2} \\
&= 2/3, \ -1/3.
\end{aligned}$$

Molemmat juuret itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi. Prosessi on siis stationaarinen.

b) Autokorrelaatiot noudattavat samaa differenssiyhtälöä kuin itse prosessi eli $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2}$, mutta alkuarvot määräävät yhtälön ratkaisun eli autokorrelaatiot täsmällisesti. Ensimmäinen alkuarvo saadaan helposti. Havainnon autokorrelaatio itsensä kanssa on

$$\rho_0 = 1.$$

Toinen alkuarvo eli autokorrelaatio viipeellä 1 on kaavan [3.4.27] mukaan

$$\begin{aligned}
\rho_1\big|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} &= \left.\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} \\
&= \frac{1/3}{1-2/9} \\
&= \frac{3}{7} \\
&\approx 0,43.
\end{aligned}$$

Autokorrelaatiot viipeillä 2, 3 ja 4 voidaan laskea nyt rekursiivisesti:

$$
\begin{aligned}
\rho_2|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} &= (\phi_1\rho_1+\phi_2\rho_0)|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} \\
&= (\frac{1}{3})\cdot\frac{3}{7}+(\frac{2}{9})\cdot 1 \\
&= \frac{23}{63} \\
&\approx 0,37, \\
\rho_3|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} &= (\phi_1\rho_2+\phi_2\rho_1)|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} \\
&= (\frac{1}{3})\cdot\frac{23}{63}+(\frac{2}{9})\cdot\frac{3}{7} \\
&= \frac{41}{189} \\
&\approx 0,22
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\rho_4|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} &= (\phi_1\rho_3+\phi_2\rho_2)|_{\phi_1,\phi_2=1/3,2/9} \\
&= (\frac{1}{3})\cdot\frac{41}{189}+(\frac{2}{9})\cdot\frac{23}{63} \\
&= \frac{87}{567} \\
&\approx 0,15.
\end{aligned}
$$

Autokorrelaatioiden itseisarvot kuoleentuvat tasaisesti, koska karakteristisen yhtälön juuret ovat reaalilukuja. Ts. differenssiyhtälön $\rho_j=\phi_1\rho_{j-1}+\phi_2\rho_{j-2}$ ratkaisu konvergoi vähitellen nollaan (differenssiyhtälön triviaaliin ratkaisuun.)

2.

a) Autokorrelaatiot noudattavat 2. asteen differenssiyhtälöä

$$\rho_j=\phi_1\rho_{j-1}+\phi_2\rho_{j-2}.$$

Tällaisen yhtälön yleinen ratkaisu, kun ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat erisuuria, on tiivistelmän "Differenssiyhtälöiden ratkaisuista" mukaan

$$\rho_j=a_1\lambda_1^j+a_2\lambda_2^j,$$

jossa systeemin alkuarvot määräävät a_1:n ja a_2:n suuruuden. λ_1 ja λ_2 ovat AR(2)-prosessin karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2-\phi_1\lambda-\phi_2=0$$

juuret. Autokorrelaatiofunktion tilanteessa differenssiyhtälön alkuarvo $\rho_0=1$, mistä seuraa, että

$$
\begin{aligned}
1 &= a_1\lambda_1^0+a_2\lambda_2^0 \\
&= a_1+a_2
\end{aligned}
$$

eli $a_2 = 1 - a_1$. Toinen alkuarvo (ρ_1) määrää yksikäsitteisesti a_1:n ja a_2:n:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \\
&\overset{a_2=1-a_1}{=} a_1\lambda_1 + (1-a_1)\lambda_2 \quad <=> \\
a_1 &= \frac{\rho_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Toinen alkuarvo eli autokorrelaatio viipeellä 1 on kaavan [3.4.27] mukaan $\phi_1/(1-\phi_2)$. Toisaalta sivun 30 (tai minkä tahansa hyvän 2. asteen polynomin ratkaisua käsittelevän teoksen) mukaan AR(2)-prosessin karakteristisen yhtälön juuria ja ϕ_i-parametreja sitovat yhtälöt $\phi_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ ja $\phi_2 = -\lambda_1\lambda_2$. Sijoitetaan nämä arvot ρ_1:n paikalle ja ratkaistaan a_1 ja a_2:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\rho_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{\phi_1/(1-\phi_2) - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)/[1-(-\lambda_1\lambda_2)] - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2(1+\lambda_1\lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)} \\
&= \frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1 - a_1 \\
&= 1 - \frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)} \\
&= \frac{\boldsymbol{\lambda}_1 - \lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 - \boldsymbol{\lambda}_1 + \lambda_1\lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)} \\
&= \frac{-\lambda_2(1-\lambda_1^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

Differenssiyhtälön ratkaisuksi ja suljetuksi muodoksi autokorrelaatiofunktiolle saadaan

$$\begin{aligned}
\rho_j &= a_1\lambda_1^j + a_2\lambda_2^j \\
&= \frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}\lambda_1^j + \frac{-\lambda_2(1-\lambda_1^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}\lambda_2^j \\
&= \frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)\lambda_1^j - \lambda_2(1-\lambda_1^2)\lambda_2^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu ei ole sama kuin 2. asteen differenssiyhtälön ilmpulssivastefunktion ratkaisu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_t} &= c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^j + \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^j \\
&= \frac{\lambda_1^{j+1}-\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}
\end{aligned}
$$

($a_1 \neq c_1$ ja $a_2 \neq c_2$; kirjan s. 33). (Varmistua voi kokeilemalla sopivia numeerisia arvoja ominaisarvoille.)

b) HT 5.1:n mukaan $\lambda_1 = 2/3$ ja $\lambda_2 = -1/3$. Sijoitetaan nämä arvot a)-kohdassa johdettuun autokorrelaatiofunktion suljettuun muotoon:

$$
\begin{aligned}
\rho_j &= \left.\frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)\lambda_1^j - \lambda_2(1-\lambda_1^2)\lambda_2^j}{(\lambda_1-\lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)}\right|_{\lambda_1=2/3,\lambda_2=-1/3} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{1}{3}\right)\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\left(-\frac{1}{3}\right)^j}{\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\left[1+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^j}{\frac{7}{9}} \\
&= \frac{9}{7}\left[\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^j\right] \\
&= \frac{16}{21}\left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{5}{21}\left(-\frac{1}{3}\right)^j
\end{aligned}
$$

Tulkinta: Ratkaisu on 2. asteen differenssiyhtälön yleistä muotoa. Ominaisarvot $\lambda_1 = 2/3$ ja $\lambda_2 = -1/3$ ovat potenssimuodossa ratkaisussa kuten selostuksen "Differenssiyhtälöiden ratkaisuista" mukaan tuleekin olla.

c) Suljettua muotoa oleva kaava ρ_j:lle kohdassa a) tuottaa samat autokorrelaatioiden arvot kuin kohdassa a), kun ne laskettiin rekursiivisesti (alla Survolla laskettuna):

ACF(X,Y,J):=(X*(1-Y^2)*(X^J)-Y*(1-X^2)*(Y^J))/((X-Y)*(1+X*Y))
ACF(2/3,-1/3,**1**)=0.43
ACF(2/3,-1/3,**2**)=0.37
ACF(2/3,-1/3,**3**)=0.22
ACF(2/3,-1/3,**4**)=0.15

Suljettua muotoa oleva kaava ρ_j:lle kohdassa b) tuottaa niinikään samat autokorrelaatioiden arvot (alla Survolla laskettuna):

ACF(X):=(16/21)*((2/3)^X)+(5/21)*((-1/3)^X)
ACF(0)=1
ACF(1)=0.43
ACF(2)=0.37
ACF(3)=0.22
ACF(4)=0.15

(Samaa prosessia vastaavan impulssivastefunktion arvot eivät ole samoja:
IRF(X,Y,J):=(X^(J+1)-Y^(J+1))/(X-Y)
IRF(2/3,-1/3,**1**)=0.33
IRF(2/3,-1/3,**2**)=0.33
IRF(2/3,-1/3,**3**)=0.19
IRF(2/3,-1/3,**4**)=0.14)

3.

a) Huomataan ensiksi, että autokorrelaatiofunktio konvergoi nollaan suurilla $|\theta|$:n arvoilla:

$$\lim_{\theta\to\infty} \rho_1(\theta) \overset{[3.3.7]}{=} \lim_{\theta\to\infty} \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0$$

ja

$$\lim_{\theta\to-\infty} \rho_1(\theta) \overset{[3.3.7]}{=} \lim_{\theta\to-\infty} \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0.$$

Funktio ei "räjähdä" (mikä ei autokorrelaatiofunktiolle olisikaan mahdollista) eikä selvästikään saa ääriarvojansa suurilla $|\theta|$:n arvoilla. Ensimmäisen autokorrelaation ääriarvot löytyvät siis derivoimalla $\rho_1(\theta)$ ja asettamalla $d\rho_1(\theta)/d\theta$ nollaksi:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_1(\theta)}{d\theta} &= \frac{1+\theta^2-2\theta\cdot\theta}{(1+\theta^2)^2} \\
&= \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} \qquad \overset{\text{aset.}}{=} \quad 0 \quad \Leftrightarrow \\
1-\theta^2 &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\
\theta^2 &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\
\theta &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Ääriarvojen laatu paljastuu laskemalla toinen derivaatta näissä pisteissä:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\rho_1(\theta)}{d\theta^2} &= \frac{-2\theta(1+\theta^2)^2-2(1+\theta^2)2\theta}{(1+\theta^2)^4} \\
&= \frac{-2\theta(1+\theta^2)-4\theta}{(1+\theta^2)^3} \\
&= \frac{-2\theta(1+\theta^2+2)}{(1+\theta^2)^3} \\
&= \frac{-2\theta(3+\theta^2)}{(1+\theta^2)^3},
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{d^2\rho_1(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=1} = \frac{-2(3+1^2)}{(1+1^2)^3}$$
$$= -1 \qquad < 0$$

ja

$$\left.\frac{d^2\rho_1(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=-1} = \frac{-2(-1)[3+(-1^2)]}{[1+(-1)^2]^3}$$
$$= 1 \qquad > 0.$$

Näin ollen $\rho_1(\theta)$ saa maksimiarvonsa θ:n arvolla 1 ja minimiarvonsa θ:n arvolla -1. Nämä maksimi- ja minimiarvot ovat

$$\rho_1(\theta)|_{\theta=1} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

ja

$$\rho_1(\theta)|_{\theta=-1} = \frac{-1}{1+(-1^2)} = -\frac{1}{2}.$$

Esitä kuva!

b)

$$\rho_1(\theta)|_{\theta=0,005} = \frac{0,005}{1+0,005^2} \approx 0,005$$

MA(q)-prosessit ovat aina stationaarisia, kun $q < \infty$ (kirjan s. 51). Tämä prosessi on kääntyvä, koska $|\theta| < 1$ (kirjan s. 65).

c) Koska $1/0,005 = 200$ ja $\rho_1(\theta) = \rho_1(1/\theta)$ (kirjan s. 49), niin $\rho_1(\theta)|_{\theta=200}$ on kohdan b) perusteella n. $0,005$. Tuloksen voi tietenkin myös laskea:

$$\rho_1(\theta)|_{\theta=200} = \frac{200}{1+200^2} \approx 0,005.$$

Kuten edellä: MA(q)-prosessit ovat aina stationaarisia, kun $q < \infty$. Tämä prosessi ei ole kääntyvä, koska $|\theta| > 1$ (kirjan s. 65).

d) Kaavan [3.7.7] mukaan $\sigma^2 = \widetilde{\theta}^2 \operatorname{var}(\widetilde{\varepsilon}_t)$, joten $\operatorname{var}(\widetilde{\varepsilon}_t) = \widetilde{\theta}^{-2}\sigma^2$ on totta. Tästä innovaatioiden varianssien välisestä suhteesta ei kuitenkaan seuraa, että $\widetilde{\varepsilon}_t$ olisi $\widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t$. Väitteen mukaan $\widetilde{\varepsilon}_t = \widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t$. Oletuksen mukaan tutkitaan saman aikasarjan kääntyvää ja kääntymätöntä MA(1)-esitystä, jolloin $\widetilde{\theta} = \theta^{-1}$. Väite voidaan siis muotoilla näin: $\widetilde{\varepsilon}_t = \widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t = \theta\varepsilon_t$. Nähdään, että kääntyvän ja kääntymättömän esityksen innovaatioiden välillä ei ole väitettyä suhdetta:

$$\begin{aligned}(1+\theta^{-1}L)\theta\varepsilon_t &= (\theta+L)\varepsilon_t \\ &\neq (1+\theta L)\varepsilon_t \\ &= y_t.\end{aligned}$$

Väite ei siis pidä paikkaansa.

(Vaihtoehtoinen tapa nähdä viimeinen tulos on seuraava: Sijoittamalla $\widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t$ innovaation $\widetilde{\varepsilon}_t$ paikalle saataisiin prosessi

$$\widetilde{\theta}\widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_{t-1} + \widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t = (\widetilde{\theta}^{-1} + L)\varepsilon_t$$

joka on eri prosessi kuin

$$y_t = (1 + \widetilde{\theta}L)\varepsilon_t.$$

Väite ei ole siis totta.)

4. Luonnehditaan ensin prosessien ε_{1t} ja ε_{2t} suhdetta:

$$\mathsf{cor}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \frac{[e^t/(1+e^t)]\sigma^2}{\sigma \times \sigma} = \frac{e^t}{1+e^t}.$$

Kaukaisessa menneisyydessä ($t \to -\infty$) korrelaatio on nolla mutta kaukaisessa tulevaisuudessa ($t \to \infty$) yksi. Ajankohdalla $t = 0$ korrelaatio on $1/2$.

Varsinainen vastaus tehtävään alkaa. Odotusarvo on vakio:

$$\mathsf{E}(\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}) = 0.$$

Sen sijaan varianssi riippuu ajankohdasta:

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}(\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}) &\overset{\mathsf{E}(\varepsilon_{1t}+\varepsilon_{2t})=0}{=} \mathsf{E}[(\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t})^2] \\
&= \mathsf{E}(\varepsilon_{1t}^2) + 2\mathsf{E}(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) + \mathsf{E}(\varepsilon_{2t}^2) \\
&\overset{\mathsf{cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})=[e^t/(1+e^t)]\sigma^2}{=} \sigma^2 + 2\sigma^2\frac{e^t}{1+e^t} + \sigma^2 \\
&= 2\sigma^2(1 + \frac{e^t}{1+e^t}).
\end{aligned}$$

Varianssi on kaukaisessa menneisyydessä ($t \to -\infty$) $2\sigma^2$ ja kaukaisessa tulevaisuudessa ($t \to \infty$) $4\sigma^2$. Prosessi $\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}$ ei ole heikosti stationaarinen, koska sen ensimmäiset ja toiset momentit eivät ole vakioita. Kahden heikosti stationaarisen prosessin summa ei siis ole välttämättä heikosti stationaarinen prosessi. Itse asiassa kahden valkoista kohinaa olevan prosessin summa ei ole välttämättä valkoista kohinaa!