STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 4 vastaukset (5.10.)

1.

a) Odotusarvo ei riipu ajankohdasta:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(y_t) &= \mathsf{E}(y_1)\\ &= \mu.\end{aligned}$$

Varianssi ei riipu ajankohdasta:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \mathsf{var}(y_t)\\ &= \mathsf{var}(y_1)\\ &= \mathsf{E}(y_1^2) - [\mathsf{E}(y_1)]^2\\ &= \mathsf{E}[(\mu+\varepsilon_1)^2] - \mu^2\\ &= \mu^2 + 2\mu\mathsf{E}(\varepsilon_1) + \mathsf{E}(\varepsilon_1^2) - \mu^2\\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Autokovarianssit eivät riipu ajankohdasta:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \mathsf{cov}(y_t, y_{t-j})\\ &= \mathsf{E}\{[y_t - \mathsf{E}(y_t)][y_{t-j} - \mathsf{E}(y_{t-j})]\}\\ &\overset{\mathsf{E}(y_i)=\mu}{=} \mathsf{E}[(y_t-\mu)(y_{t-j}-\mu)]\\ &\overset{y_t=y_1}{=} \mathsf{E}[(y_1-\mu)(y_1-\mu)]\\ &= \mathsf{E}(y_1^2) - \mu\mathsf{E}(y_1) - \mu\mathsf{E}(y_1-\mu)\\ &= \mathsf{E}[(\mu+\varepsilon_1)^2] - \mu^2 - 0\\ &= \mu^2 + 2\mu\mathsf{E}(\varepsilon_1) + \mathsf{E}(\varepsilon_1^2) - \mu^2\\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Prosessi $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ on heikosti stationaarinen, koska sen 1. ja 2. momentit eivät riipu ajankohdasta (t).

Huom. Tutkija tarvitsisi monia reaalisaatioita prosessista, jotta hän pääsisi jyvälle sen luonteesta!

b) Autokorrelaatiot ρ_j ovat

$$\begin{aligned}\rho_j &= \frac{\gamma_j}{\gamma_0}\\ &\overset{\text{a)}}{=} \frac{\sigma^2}{\sigma^2}\\ &= 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Autokorrelaatio on 1 eli vakio kaikille viipeille. Riippuvuus menneistä havainnoista on mahdollisimman suurta. Autokorrelaatiot eivät kuoleennu edes suurilla viipeen j arvoilla.

Kohdan a) mukaan prosessi on heikosti stationaarinen. Näin ollen heikosti stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio ei välttämättä kuoleennu suurilla viipeen j arvoilla!

Huom. Tyypillisissä — kirjassa esillä olleissa tilanteissa — heikosti stationaarisen prosessin autokorrelaatiot konvergoivat nollaan suurilla j:n arvoilla.

2.

a) "Standarditilanteessa", jolloin prosessin innovaatiot $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$, on MA($q$)-prosessi ($q < \infty$) aina heikosti stationaarinen (kirjan s. 51). (Jos innovaatioilla ei ole momentteja — esim. innovaatiot noudattavat Cauchy-jakaumaa — niin MA(q)-prosessi ei ole heikosti stationaarinen.

b) MA(∞)-prosessi ei ole aina heikosti stationaarinen. Esimerkiksi jos "$\theta_j = \psi_j$-kertoimet" eivät ole neliöllisesti summautuvia, niin prosessilla ei ole äärellistä varianssia eikä se ole heikosti stationaarinen (s. 52).

c) & d) Vastaesimerkki. Noudattakoon y_t MA(q)-prosessia

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

jossa $q > 1$, $\theta_q \neq 0$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$ ("$\theta_1 = \cdots = \theta_{q-1} = 0$"). On helppo osoittaa, että

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(y_t) &= 0, \\ \mathsf{E}(y_t^2) &= (1 + \theta_q)\sigma_\varepsilon^2 \quad > 0, \\ \mathsf{E}(y_t y_{t-1}) &= 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \gamma_q \overset{\mathsf{E}(y_t)=0}{=} \mathsf{E}(y_t y_{t-q}) &= \mathsf{E}(\varepsilon_t + \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-q} + \theta_q \varepsilon_{t-2q}) \\ &= \mathsf{E}(\theta_q \varepsilon_{t-q}^2) \\ &= \theta_q \sigma^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Prosessi ei ole siis autokorreloimaton kaikilla viipeillä eikä ole valkoista kohinaa. (Erään suomalaisen aikasarja-analyysin kurssin luentomonisteessa määriteltiin valkoinen kohina tehtävän mukaisesti. Varmaan painovirhe.)

3.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty \quad &=> \\ \textstyle\sum_{i=j}^{\infty} |\psi_i| < \infty \ (j \geq 1) \quad &=> \\ \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} \quad &< \\ \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i \psi_{i+j}| \quad &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \, |\psi_{i+j}| \\ &< \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| \sum_{i=j}^{\infty} |\psi_{i+j}| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ytimekkäin vastaus olisi, että kaavan [3.3.19] mukaan (todistus kirjan s:lla 70) autokovarianssien itseisarvojen summa on äärellinen, jos ψ_j-kertoimet ovat absoluuttisesti summautuvia, joten varmasti yksittäiset autokorrelaatiotkin ovat. Argumentin taustalla on kuitenkin tämän harjoitustehtävän tapainen todistus.

4.

a)

$$\mathsf{E}(y_t) = \mathsf{E}(\beta t + \varepsilon_t) = \mathsf{E}(\beta t) + \mathsf{E}(\varepsilon_t) = \mathsf{E}(\beta t) + 0 = \beta t.$$

Odotusarvo muuttuu ajassa ($\beta \neq 0$). Prosessi $y_t = \beta t + \varepsilon_t$ ei siis ole heikosti stationaarinen (ellei $\beta = 0$).

b)

$$\mu = \mathsf{E}(y_t - \beta t) = 0,$$
$$\gamma_0 = \mathsf{var}(y_t - \beta t) = \mathsf{E}[(y_t - \beta t)^2] = \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

ja

$$\gamma_j = \mathsf{cov}[y_t - \beta t, y_{t-j} - \beta(t-j)] = \mathsf{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = \mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0,$$

kun $j \neq 0$. Prosessi $y_t - \beta t = \varepsilon_t$ on siis heikosti stationaarinen.

c)

$$\mathsf{E}(y_t) = \beta \sin(t).$$

Odotusarvo muuttuu ajankohdasta toiseen ($\beta \neq 0$). Prosessi ei ole heikosti stationaarinen.

d)

$$\mu = \mathsf{E}(y_t^{(i)}) = \sin(t)\mathsf{E}(\beta^{(i)}) = \sin(t) * 0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}(y_t^{(i)}) \quad = \quad \mathsf{E}[(y_t^{(i)} - \mu)^2] \quad &= \mathsf{E}\{[\beta^{(i)} \sin(t) + \varepsilon_t - 0]^2\} \\
&= \mathsf{E}[\beta^{(i)} \sin(t)]^2 + \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) + 2\mathsf{E}\{[\beta^{(i)} \sin(t)]\varepsilon_t\} \\
&\overset{\perp}{=} [\sin^2(t)]\mathsf{E}[\beta^{(i)})^2] + \sigma^2 + 0 \\
&= \sigma_\beta^2 \sin^2(t) + \sigma^2.
\end{aligned}$$

Prosessin odotusarvo on vakio, mutta sen varianssi ei ole. Prosessi ei siis ole heikosti stationaarinen.

e)

$$\begin{aligned}
\mu \quad = \quad \mathsf{E}(y_t^{(i)}) \quad &= [\sin(t)]\mathsf{E}(\beta_1^{(i)}) + [\cos(t)]\mathsf{E}(\beta_2^{(i)}) + \mathsf{E}(\varepsilon_t) \\
&= 0 * \sin(t) + 0 * \cos(t) + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathsf{E}(y_t^{(i)} - \mu)^2 \\
&= \mathsf{E}[\beta_1^{(i)} \sin(t) + \beta_2^{(i)} \cos(t) + \varepsilon_t - 0]^2 \\
&= \mathsf{E}[\beta_1^{(i)} \sin(t) + \beta_2^{(i)} \cos(t)]^2 + 2\mathsf{E}\{[\beta_1^{(i)} \sin(t) + \beta_2^{(i)} \cos(t)]\varepsilon_t\} + \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) \\
&= \mathsf{E}[\beta_1^{(i)})^2] \sin^2(t) + 2\mathsf{E}(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}) \sin(t)\cos(t) + \mathsf{E}[\beta_1^{(i)})^2] \cos^2(t) + 0 + \sigma^2 \\
&\overset{\perp}{=} \sigma_\beta^2 \sin^2(t) + 2 * 0 * \sin(t)\cos(t) + \sigma_\beta^2 \cos^2(t) + \sigma^2 \\
&= \sigma_\beta^2[\sin^2(t) + \cos^2(t)] + \sigma^2 \\
&= \sigma_\beta^2 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_j &= \mathsf{E}[(y_t^{(i)} - \mu)(y_{t-j}^{(i)} - \mu)] \\
&= \mathsf{E}\{[\beta_1^{(i)} \sin(t) + \beta_2^{(i)} \cos(t) + \varepsilon_t - 0][\beta_1^{(i)} \sin(t-j) + \beta_2^{(i)} \cos(t-j) + \varepsilon_{t-j} - 0]\} \\
&= \mathsf{E}\{[\beta_1^{(i)} \sin(t)][\beta_1^{(i)} \sin(t-j) + \beta_2^{(i)} \cos(t-j) + \varepsilon_{t-j}]\} \\
&\quad + \mathsf{E}\{[\beta_2^{(i)} \cos(t)][\beta_1^{(i)} \sin(t-j) + \beta_2^{(i)} \cos(t-j) + \varepsilon_{t-j}]\} \\
&\quad + \mathsf{E}\{\varepsilon_t[\beta_1^{(i)} \sin(t-j) + \beta_2^{(i)} \cos(t-j) + \varepsilon_{t-j}]\} \\
&= [\sin(t)]\{[\sin(t-j)]\mathsf{E}[(\beta_1^{(i)})^2] + [\cos(t-j)]\mathsf{E}[(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}) + \mathsf{E}(\beta_1^{(i)}\varepsilon_{t-j})\} \\
&\quad + [\cos(t)]\{[\sin(t-j)]\mathsf{E}(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}) + [\cos(t-j)]\mathsf{E}[(\beta_2^{(i)})^2] + \mathsf{E}(\beta_2^{(i)}\varepsilon_{t-j})\} \\
&\quad + [\sin(t-j)]\{\mathsf{E}(\varepsilon_t\beta_1^{(i)}) + [\cos(t-j)]\mathsf{E}(\varepsilon_t\beta_2^{(i)}) + \mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j})\} \\
&\overset{\perp}{=} [\sin(t)][\sin(t-j)]\sigma_\beta^2 + 0 + 0 \\
&\quad + 0 + [\cos(t)][\cos(t-j)]\sigma_\beta^2] + 0 \\
&\quad + 0 + 0 + 0 \\
&= \sigma_\beta^2\{[\cos(t)][\cos(t-j)] + [\sin(t)][\sin(t-j)]\}
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle \begin{array}{lcl} \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) & = & \cos(x-y); \\ \text{valitaan yllä } x = t \text{ ja } y = t - j & & \end{array} \right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_\beta^2\{\cos[(t - (t-j)]\} \\
&= \sigma_\beta^2[\cos(j)].
\end{aligned}
$$

Prosessin odotusarvo ($\mathsf{E}(y_t^{(i)}) = 0$), varianssi ($\mathsf{var}(y_t) = \mathsf{E}[(y_t^{(i)})^2] - [\mathsf{E}(y_t^{(i)})]^2 = \sigma_\beta^2 - 0^2 = \sigma_\beta^2$) ja autokovarianssit ($\gamma_j = \sigma_\beta^2 \cos(j)$) ovat vakioita. Prosessi on siis heikosti stationaarinen. $\beta_1^{(i)}$- ja $\beta_2^{(i)}$-parametrien odotusarvoa ja varianssia ei voi selvittää yhden aikasarjan avulla.

Huom. Prosessi on heikosti stationaarinen, vaikka asetettaisiin $\varepsilon_t \equiv 0$. Tällöin yksittäistä aikasarjaa voitaisiin ennustaa äärettömän tarkasti mielivaltaisen kaukaiseen tulevaisuuteen!

5.

a) Ehtojen merkitys:

- $|\phi| < 1$ eli prosessi on stationaarinen,
- $|\theta| < 1$ eli prosessi on kääntyvä ja
- $\phi \neq -\theta$ eli viivepolynomit eivät supistu pois (niillä ei ole yhteisiä juuria) eli malli on parsimoninen.

b) Vihjeen mukaisesti kerrotaan kaava (3) y_{t-j}:llä ja hyödynnetään stationaarisuusoletusta — odotusarvoja laskettaessa:

$$(1-\phi L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t,$$

joten

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(y_t y_{t-j} - \phi y_{t-1} y_{t-j}) &= \mathsf{E}(\varepsilon_t y_{t-j} + \theta \varepsilon_{t-1} y_{t-j}) \quad \Leftrightarrow \\ \gamma_j &\overset{\mathsf{E}(y_t)=0}{=} \phi\gamma_{j-1} + \mathsf{E}(y_{t-j}\varepsilon_t) + \theta \mathsf{E}(y_{t-j}\varepsilon_{t-1}). \end{aligned} \tag{*}$$

Kaksi viimeistä odotusarvoa ovat selvästikin nollia, kun $j > 1$. Ehdon pätiessä jakamalla alempi yhtälö (vielä tuntemattomalla) γ_0:lla saadaan toinen väitteistä:

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_j = \phi \rho_{j-1}, \quad j > 1.$$

Kun $j = 1$, pätee

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\overset{(*)}{=} \phi\gamma_0 + \mathsf{E}(y_{t-1}\varepsilon_t) + \theta \mathsf{E}(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) \\ &\overset{(3)}{=} \phi\gamma_0 + 0 + \theta \mathsf{E}[(\phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})\varepsilon_{t-1}] \\ &= \phi\gamma_0 + \theta(0 + \sigma^2 + 0) \\ &= \phi\gamma_0 + \theta\sigma^2. \end{aligned} \tag{**}$$

Kun $j = 0$, pätee

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi\gamma_{-1} + \mathsf{E}(y_t\varepsilon_t) + \theta \mathsf{E}(y_t\varepsilon_{t-1}) \\ &\overset{(3)\&\text{stat.}}{=} \phi\gamma_1 + \mathsf{E}[(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\varepsilon_t] + \theta \mathsf{E}[(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\varepsilon_{t-1}] \\ &= \phi\gamma_1 + (0 + \sigma^2 + 0) + (\theta\phi\sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2) \\ &= \phi\gamma_1 + (1 + \theta\phi + \theta^2)\sigma^2. \end{aligned} \tag{***}$$

Sijoitetaan yltä γ_1 yo. kaavaan γ_0:lle:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi(\phi\gamma_0 + \theta\sigma^2) + (1 + \theta\phi + \theta^2)\sigma^2 \quad \Leftrightarrow \\ \gamma_0 &= \frac{\phi\theta + 1 + \theta\phi + \theta^2}{1 - \phi^2}\sigma^2 \\ &= \frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}\sigma^2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä γ_1:n kaavaan:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi \frac{1+2\phi\theta+\theta^2}{1-\phi^2}\sigma^2 + \theta\sigma^2 \\
&= \frac{\phi + 2\phi^2\theta + \phi\theta^2 + \theta - \phi^2\theta}{1-\phi^2}\sigma^2 \\
&= \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1-\phi^2}\sigma^2.
\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\dfrac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1-\phi^2}\sigma^2}{\dfrac{1+2\phi\theta+\theta^2}{1-\phi^2}\sigma^2} = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}.$$

Kaksi ylimääräistä huomiota:

1. Viimeinen tulos voitaisiin johtaa myös ratkaisematta eksplisiittisesti γ_0:aa tai γ_1:tä: Kaavoista (**) ja (***) saadaan, että

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_0 - \phi\gamma_1}{\gamma_1 - \phi\gamma_0} &= \frac{(1+\theta\phi+\theta^2)\sigma^2}{\theta\sigma^2} \\
&= \frac{(1+\theta\phi+\theta^2)}{\theta} & \Leftrightarrow \\
\theta(\gamma_0 - \phi\gamma_1) &= (\gamma_1 - \phi\gamma_0)(1+\theta\phi+\theta^2) & \Leftrightarrow \\
[\phi\theta + (1+\theta\phi+\theta^2)]\gamma_1 &= [\theta + \phi(1+\theta\phi+\theta^2)]\gamma_0 & \Leftrightarrow \\
\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} &= \frac{\theta+\phi(1+\theta\phi+\theta^2)}{1+2\theta\phi+\theta^2} \\
&= \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2}.
\end{aligned}$$

2. Vaihtoehtoisesti — ja tarkistuksena — voidaan johtaa prosessin varianssi käyttämättä hyväksi stationaarisuusoletusta. Prosessin odotusarvo on

selvästikin nolla, joten prosessin varianssi on sen neliön odotusarvo:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}(y_t^2) \\
= \quad & \mathsf{E}[(1-\phi L)^{-1}(1+\theta L)\varepsilon_t]^2 \\
\overset{|\phi|<1}{=} \quad & \mathsf{E}[(1+\phi L+\phi^2 L^2+\cdots)(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1})]^2 \\
= \quad & \mathsf{E}[(\varepsilon_t+\phi\varepsilon_{t-1}+\phi^2\varepsilon_{t-2}+\cdots)+\theta(\varepsilon_{t-1}+\phi\varepsilon_{t-2}+\phi^2\varepsilon_{t-3}+\cdots)] \\
& \quad \times[(\varepsilon_t+\phi\varepsilon_{t-1}+\phi^2\varepsilon_{t-2}+\cdots)+\theta(\varepsilon_{t-1}+\phi\varepsilon_{t-2}+\phi^2\varepsilon_{t-3}+\cdots)] \\
\overset{\mathsf{IID}}{=} \quad & \mathsf{E}[(\varepsilon_t^2+\phi^2\varepsilon_{t-1}^2+\phi^4\varepsilon_{t-2}^2+\cdots)+\theta^2(\varepsilon_{t-1}^2+\phi\varepsilon_{t-2}^2+\phi^2\varepsilon_{t-3}^2+\cdots) \\
& \quad +2\theta\phi(\varepsilon_{t-1}^2+\phi^2\varepsilon_{t-2}^2+\phi^4\varepsilon_{t-3}^2+\cdots) \\
= \quad & \left[\frac{1}{1-\phi^2}+\frac{\theta^2}{1-\phi^2}+\frac{\theta\phi}{1-\phi^2}\right]\sigma^2 \\
= \quad & \left[\frac{1+2\theta\phi+\theta^2}{1-\phi^2}\right]\sigma^2. \quad \%
\end{aligned}
$$

ARMA(p,q)-prosessin autokorrelaatiot noudattavat viipeestä q eteenpäin prosessin AR-osan mukaista differenssiyhtälöä (Hamilton s. 60). Tehtävän tilanteessa AR-osa on AR(1)-prosessin mukainen, joten viipeen 1 jälkeiset autokorrelaatiot noudattavat prosessin mukaista 1. asteen differenssiyhtälöä ($\rho_j = \phi\rho_{j-1}$, $j > 1$).

c) Kun $\phi \approx 1$ ja $\phi < 1$ on 1. autokorrelaatio

$$\rho_1\big|_{\phi\approx 1} \approx \left.\frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}\right|_{\phi\approx 1} \approx \frac{(1+\theta)(1+\theta)}{1+2\theta+\theta^2} = 1.$$

Seuraavat autokorrelaatiot noudattavat b)-kohdan mukaan differenssiyhtälöä

$$\rho_j = \phi\rho_{j-1}.$$

Kun ϕ on lähellä yhtä, ovat myös ρ_2, ρ_3, jne. lähellä yhtä. Viipeen j kasvaessa autokorrelaatioiden täytyy kuitenkin kuoleentua lopulta eli mennä nollaan, koska $|\phi| < 1$.

Huom! Lasku/väite

$$\lim_{\phi\to 1}\rho_1 = \lim_{\phi\to 1}\frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$$

ei olisi järkevä, koska b)-kohdassa johdettu kaava ρ_1:lle oletti, että prosessi on stationaarinen ($|\phi| < 1$).

d) Hyvin erilaiset autokorrelaatiofunktiot ovat mahdollisia, kun prosessi on ARMA(1,1). Ks. kuva 3.11 kirjassa Box ja Jenkins (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control.*

Huomaa, että kohdan *iii)* autokorrelaatiofunktio saa vain negatiivisia arvoja, vaikka AR-kerroin on positiivinen. (1. autokorrelaatio on negatiivinen MA-kertoimen takia, ja seuraavat autokorrelaatiot noudattavat AR-osan määräämää differenssiyhtälöä.)