STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 3 vastaukset (28.9.)

1. Hajotelmien [1.2.17] ja [1.2.19] mukaan pätee

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}$$

ja

$$\mathbf{A}^j = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}^j\mathbf{T}^{-1},$$

joissa $n \times n$ -matriisit $\mathbf{\Lambda} = \lceil \lambda_1 \dots \lambda_n \rfloor$ ja $\mathbf{T}$ koostuvat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvoista ja -vektoreista. Oletuksen mukaan ominaisarvoille λ_i pätee $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Näin ollen $\lim_{j\to\infty} \lambda^j = 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \mathbf{\Lambda}^j = \lceil \lim_{j\to\infty} \lambda_1^j \dots \lim_{j\to\infty} \lambda_n^j \rfloor = \mathbf{0}_n$$

ja

$$\lim_{j\to\infty} \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}^j\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{0}_n.$$

2. Karakteristinen yhtälö [1.2.16] on 3. asteen differenssiyhtälön tilanteessa

$$\lambda^3 - \phi_1\lambda^2 - \phi_2\lambda - \phi_3 = 0.$$

Valitaan tässä $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \phi$ ja $\phi_3 = -\phi$ (tehtävän differenssiyhtälö on $y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-2} - \phi y_{t-3}$) ja saadaan

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \phi\lambda + \phi = 0.$$

Yhtälöllä on juuri λ:n arvolla 1: $1^3 - 1^2 - \phi + \phi = 0$. Karakteristisen yhtälön kaikki juuret eivät ole itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi, joten differenssiyhtälön impulssivastefunktio ei ole stabiili millään ϕ:n arvolla.

3.

a) Karakteristinen yhtälö on (esim. kaavan [2.3.19] mukaan)

$$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0,$$

jossa $\phi_1 = 1$ ja $\phi_2 = -0,5$ (differenssiyhtälö on $y_t = y_{t-1} - 0,5y_{t-2} + w_t$). Juuret ovat

$$\lambda_1,\lambda_2 = \left.\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}\right|_{\phi_1=1,\phi_2=-0,5} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4(-0,5)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} = 0,5 \pm 0,5i.$$

b) Systeemi on stabiili, koska sekä λ_1 että λ_2 ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi: $\sqrt{0,5^2+0,5^2} = \sqrt{0,5} \approx 0,71$. Myös HT 1.3 a):n eli kuvion 1.5 perusteella tiedetään, että systeemi on stabiili.

c) Tarkistetaan hajotelman $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2) = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)$ paikkansa pitävyys ratkaistuilla juurten arvoilla ($\lambda_1, \lambda_2 = 0,5 \pm 0,5i$):

$$
\begin{aligned}
&(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)\big|_{\lambda_1=0,5+0,5i,\lambda_2=0,5-0,5i} \\
&= [1-(0,5+0,5i)L][1-(0,5-0,5i)L] \\
&= 1-(0,5-0,5i)L-(0,5+0,5i)L+(0,5+0,5i)(0,5-0,5i)L^2 \\
&= 1-L+(0,5^2+0,5^2)L^2 \\
&= 1-L+0,5L^2 \\
&= (1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)\big|_{\phi_1=1,\phi_2=-0,5}.
\end{aligned}
$$

Hajotelma pätee.

4.

a) Kompleksiluvut

$$a \pm bi$$

ovat napakoordinaattimuodossa (s. 14 ja 709–710)

$$R[\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)].$$

Tässä

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{a^2+b^2}, \\
\cos(\theta) &= a/R. \\
\sin(\theta) &= b/R.
\end{aligned}
$$

Tehtävän juuret ovat HT 3.3 a):n mukaan

$$\lambda_1, \lambda_2 = 0,5 \pm 0,5i,$$

ja

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{0,5^2+0,5^2} = \sqrt{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71, \\
\cos(\theta) &= 0,5/\sqrt{0,5} = \sqrt{0,5} \approx 0,71 \\
\sin(\theta) &= 0,5/\sqrt{0,5} \approx 0,71.
\end{aligned}
$$

Koska "a" ja "b" ovat yhtäsuuria juurten tilanteessa, niin kompleksitason kulma θ on $\pi/4$ (45°; ks. s:n 709 kuvaa). Näin ollen juuret ovat napakoordinaattimuodossa

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sqrt{0,5}[\cos(\pi/4) \pm i\sin(\pi/4)].$$

b) HT 1.1 a):ssa johdettiin tulokset

$$c_1 = 0,5 - \frac{a}{2b} i$$

ja

$$c_2 = 0,5 + \frac{a}{2b} i,$$

joissa a ja b ovat karakteristisen yhtälön juurten reaali- ja imaginaariosat. Ne laskettiin tämän tehtävän a)-kohdassa ($a = b = 0,5$). Sijoittamalla ne yllä oleviin yhtälöihin saadaan

$$c_1 = 0,5 - \frac{0,5}{2(0,5)} i = 0,5 - 0,5i$$

ja

$$c_2 = 0,5 + \frac{0,5}{2(0,5)} i = 0,5 + 0,5i.$$

Tarkistus/huomautus: Samat luvut saataisiin HT 1.1 b):ssä johdetuilla kaavoilla

$$c_1 = 0,5 - \left. \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}} \right|_{\phi_1=1, \phi_2=-0,5} i = 0,5 - \frac{1}{2\sqrt{-1^2 - 4(-0,5)}} i = 0,5 - 0,5i$$

ja

$$c_2 = 0,5 + \left. \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}} \right|_{\phi_1=1, \phi_2=-0,5} i = 0,5 + 0,5i.$$

c) IVF on

$$\partial y_{t+j} / \partial w_t = 2R^j [\alpha \cos(\theta j) - \beta \sin(\theta j)].$$

Tässä R:n ja θ:n arvot ovat karakteristisen yhtälön juurten napakoordinaatit ja α ja β ovat IVF:n kertoimien c_1:n ja c_2:n reaali- ja imaginaariosat. Kohdassa a) laskettiin $R = 1/\sqrt{2}$ ja $\theta = \pi/4$. Kohdasta b) nähdään, että $\alpha = 0,5$ ja $\beta = -0,5$. IFV on siis

$$\begin{aligned} \partial y_{t+j} / \partial w_t &= 2 \left(\sqrt{0,5} \right)^j [0,5 \cos(\pi j/4) - (-0,5) \sin(\pi j/4)] \\ &= \left(\sqrt{0,5} \right)^j [\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4)]. \end{aligned}$$

Juuret ovat kompleksisia, joten IVF koostuu cos- ja sin-funktioista ja niiden aiheuttamista sykleistä. Syklit vaimenevat j:n suuretessa.

IVF voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned}
\partial y_{t+j}/\partial w_t &= \left(\sqrt{0,5}\right)^j [\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4)] \\
&= [(1/2)^{1/2}]^j [\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4)] \\
&= (1/2)^{j/2}[\cos(\pi j/4) + \sin(\pi j/4)] \\
&= (1/2)^{j/2} 2^{1/2}[\sin(\pi/4 + \pi j/4)] \\
&= (1/2)^{j/2}(1/2)^{-1/2}[\sin(\pi/4 + \pi j/4)] \\
&= (1/2)^{(j-1)/2}[\sin(\pi/4 + \pi j/4)].
\end{aligned}$$

Neljäs yhtäsuuruus seuraa kaavasta $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin(\pi/4 + x)$.

5.

a) HT 1.1:ssä laskettiin ominaisarvojen $\lambda_1 = a + bi$ ja $\lambda_2 = a - bi$ avulla, että $c_1 = 1/2 - ai/(2b)$ ja $c_2 = 1/2 + ai/(2b)$. Kertoimien c_i itseisarvo on

$$\sqrt{(1/2)^2 + (a/2b)^2} = 0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}.$$

Kertoimien napakoordinaattimuodot ovat

$$c_1 = 0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}[\cos(\theta^*) + i\sin(\theta^*)]$$

ja

$$c_2 = 0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}[\cos(\theta^*) - i\sin(\theta^*)],$$

joissa θ^* on kulma (radiaaneissa), jolle pätee

$$\cos(\theta^*) = 0,5/(0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}) = (1 + a^2/b^2)^{-1/2}$$

ja

$$\sin(\theta^*) = [-a/(2b)]/(0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}) = (-a/b)/\sqrt{1 + a^2/b^2}.$$

Sijoitetaan kertoimet napakoordinaattimuodossa IVF:n kaavaan (s. 15):

$$\begin{aligned}
& \partial y_{t+j}/\partial w_t \\
= \ & R^j\{c_1[\cos(\theta j) + i\sin(\theta j)] + c_2[\cos(\theta j) - i\sin(\theta j)]\} \\
= \ & R^j\{0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}[\cos(\theta^*) + i\sin(\theta^*)][\cos(\theta j) + i\sin(\theta j)] \\
& \quad +0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}[\cos(\theta^*) - i\sin(\theta^*)][\cos(\theta j) - i\sin(\theta j)]\} \\
= \ & 0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}R^j \\
& \times\{[\cos(\theta^*)\cos(\theta j) - \sin(\theta^*)\sin(\theta j)] + i[\cos(\theta^*)\sin(\theta j) + \sin(\theta^*)\cos(\theta j)] \\
& \quad +[\cos(\theta^*)\cos(\theta j) - \sin(\theta^*)\sin(\theta j)] - i[\cos(\theta^*)\sin(\theta j) + \sin(\theta^*)\cos(\theta j)]\} \\
\overset{\text{vihje}}{=} \ & R^j 0,5\sqrt{1 + a^2/b^2}2\cos(\theta^* + \theta j) \\
= \ & R^j\sqrt{1 + a^2/b^2}\cos(\theta j + \theta^*).
\end{aligned}$$

b) HT 1.1:ssä laskettiin kaavan (1) avulla, että IVF on

$$\partial y_{t+j}/\partial w_t = 0,9^j[\cos(1,29j) + 0,291\sin(1,29j)],$$

kun $\phi_1 = 0,5$ ja $\phi_2 = -0,8$. Lasketaan IVF nyt kaavan (2)

$$\partial y_{t+j}/\partial w_t = R^j\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\cos(\theta j + \theta^*)$$

avulla. HT 1.1:stä saadaan $R = 0,9$ ja $\theta = 1,29$. Kaavoista [1.2.34–5] saadaan[1]

$$\begin{aligned} a &= (\phi_1/2)\big|_{\phi_1=0,5} = 0,25, \\ b &= 0,5\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}\,\Big|_{\phi_1=0,5;\phi_2=-0,8} = 0,5\sqrt{-(0,5)^2 - 4(-0,8)} = 0,86. \end{aligned}$$

Kulma θ^* saadaan yllä johdetuista yhtälöistä

$$\cos(\theta^*) = (1 + a^2/b^2)^{-1/2}\Big|_{a=0,25;b=0,86} = (1,08)^{-1/2} = 0,96,$$

ja

$$\sin(\theta^*) = (-a/b)/\sqrt{1+a^2/b^2}\Big|_{a=0,25;b=0,86} = (-0,25/0,86)/(1,08)^{1/2} = -0,28.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan, että θ^* on $0,28$ tai $-0,28$ ($\cos(x) = \cos(-x)$). Jälkimmäinen yhtälö määrää, että[1]

$$\theta^* = -0,28.$$

IVF on siis

$$\begin{aligned} \partial y_{t+j}/\partial w_t &= \left[R^j\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\cos(\theta j + \theta^*)\right]\Bigg|_{R=0,9;a=0,25;b=0,86;\theta\approx 1,29;\theta^*=-0,28} \\ &= 0,9^j\sqrt{1+\frac{0,25^2}{0,86^2}}\cos(1,29j - 0,28) \\ &= 0,9^j\sqrt{1,08}\cos(1,29j - 0,28). \end{aligned}$$

c) Reaaliluvut ovat myös kompleksilukuja, joten mieleen saattaisi tulla ajatus, että kaavat (1) ja (2) pätisivät myös reaalisten juurten tilanteessa. Tehtävässä IVF on johdettu pitäen juuria kuitenkin liittolukuina — kuten kompleksiset juuret ovat. Reaaliset juuret eivät esiinny liittolukuina, joten johdon oletus tai yo. kaavat eivät päde IVF:lle ylipäänsä. (Kaavassa (2) olisi osamäärän a^2/b^2 nimittäjä jopa 0, kun juuret ovat reaaliset ($\lambda_i = a + bi$).)

[1] Tarkistus: Vektorin $(a, b) = (0,25; 0,86)$ ja vaaka-akselin välisen kulman kosini on $0,25/(0,25^2 + 0,86^2)^{1/2} = 0,28$ eli $\theta = 1,29$ tai $-1,29$. Geometrisella päättelyllä saadaan, että $\theta^* = 1,29$ — koska $b > 0$ — kuten sivulla 16 laskettiin.

[1] Tarkistus: HT 1.1:n mukaan $c_1 = \alpha + \beta i$, jossa $\alpha = 0,5$ ja $\beta = -0,146$. Vektorin $(\alpha, \beta) = (0,5; -0,146)$ ja vaaka-akselin välisen kulman kosini on $0,5/[0,5^2 + (-0,146)^2] = 0,96$. Tästä seuraa, että θ^* on $0,28$ tai $-0,28$. Geometrisella päättelyllä saadaan, että $\theta^* = -0,28$, koska $\beta < 0$.