STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 2 vastaukset (21.9.)

1.

a)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \\ \lambda_1^{p-2} & \lambda_2^{p-2} & \cdots & \lambda_p^{p-2} \\ \lambda_1^{p-3} & \lambda_2^{p-3} & \cdots & \lambda_p^{p-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{1} & \lambda_2^{1} & \cdots & \lambda_p^{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{11} \\ t^{21} \\ t^{31} \\ \vdots \\ t^{p-1,1} \\ t^{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^r t^{i1} = \begin{cases} 1, & \text{jos } r = p-1, \\ 0, & \text{jos } r = 0, 1, \ldots, p-2. \end{cases}$$

Tämä on täsmälleen samaa muotoa oleva yhtälöryhmä kuin lemmassa 2 (p lineaarisesti riippumatonta yhtälöä (perustele!); p tuntematonta), joten λ_i^r:ien kertoimet yo. yhtälössä ovat $[\prod_{j=1, j\neq i}^{p}(\lambda_i - \lambda_j)]^{-1}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$, eli

$$t^{i1} = \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{p}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Selvyyden vuoksi muistutetaan, että yhtälön [1.A.4] mukaan $t_{1i} = \lambda_i^{p-1}$ (matriisin $\mathbf{T}$ 1. rivin i. alkio). Sijoitetaan $t_{1i} = \lambda_i^{p-1}$ ja yllä t^{i1}:lle johdettu muoto yhtälöön [1.2.21]:

$$c_i = t_{1i} t^{i1} = \lambda_i^{p-1} \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{p}(\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{p}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Tämä on lauseen 1.2 yhtälö [1.2.25].

Lause 1.2. ei ole vieläkään täysin todistettu, koska lemmaa 2 ei todisteta. Jos ei tahdo lukea sen todistusta (esim. Chiangin (1980) kirjasta), voi itseänsä vakuuttaa kokeilemalla, että mielivaltaiset luvut toteuttavat sen.

b) Valitaan esimerkiksi $p = 3$, $\lambda_1 = 4.76$ $(\equiv a)$, $\lambda_2 = 3.9$ $(\equiv b)$, ja $\lambda_3 = 2.1$ $(\equiv c)$.

i) Asetetaan $r = 2$:
(a^r)/((a-b)*(a-c))+(b^r)/((b-a)*(b-c))+(c^r)/((c-a)*(c-b))=1.

ii) Asetetaan $r = 1$:
(a^r)/((a-b)*(a-c))+(b^r)/((b-a)*(b-c))+(c^r)/((c-a)*(c-b))=5.5511151231258e-017.

iii) Asetetaan $r = 0$:
(a^r)/((a-b)*(a-c))+(b^r)/((b-a)*(b-c))+(c^r)/((c-a)*(c-b))=-8.3266726846887e-017.

(Esimerkit on laskettu Survolla.)

2. Kirjan sivut 22–23.

3. Differenssiyhtälöön liittyvä karakteristinen yhtälö ([1.2.16]) on

$$\lambda^p - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \lambda^{p-k} = 0.$$

Merkitään yhtälön juurta $\lambda_z = R\exp(i\theta)$:lla (yhtälö [A.2.6]). Oletetaan, että λ_z sijaitsee kompleksitasoon piirretyllä yksikköympyrällä tai sen ulkopuolella eli $|R\exp(i\theta)| = |R||\exp(i\theta)| = R \geq 1$. Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että *i)* $R \geq 0$ ja *ii)* $\exp(i\theta)$ ($= \cos(\theta) + i\sin(\theta)$) sijaitsee yksikköympyrällä eli $\exp(i\theta)$:n itseisarvo on yksi ($\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$). Oletuksen mukaan differenssiyhtälön IVF on epästabiili (s. 34). Sijoitetaan juuri λ_z karakteristiseen yhtälöön:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_z^p - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \lambda_z^{p-k} & = & 0 & \iff \\ R^p \exp(ip\theta) & = & \sum_{k=1}^{p} \phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]. & \end{array}$$

Kompleksiluvut $R^p \exp(ip\theta)$ ja $\sum_{k=1}^{p} \phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]$ ovat yhtäsuuria. Kompleksitasossa niitä kuvaavat vektorit ovat siten yhtä pitkiä eli

$$|R^p \exp(ip\theta)| = |\sum_{k=1}^{p} \phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]|.$$

Merkitään $\theta^* = p\theta$ ja huomataan, että $\exp(i\theta^*)$ sijaitsee yksikköympyrällä eli

$$|\exp(ip\theta)| = |\exp(i\theta^*)| = 1.$$

Saadaan

$$\begin{array}{rcl} |R^p \exp(ip\theta)| & = & |R^p| \\ & = & R^p \\ & = & |\sum_{k=1}^{p} \phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]| \\ & \leq & \sum_{k=1}^{p} |\phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]| \\ & = & \sum_{k=1}^{p} R^{p-k} |\phi_k| \\ & \overset{R \geq 1}{\leq} & R^{p-1} \sum_{k=1}^{p} |\phi_k| \\ & \overset{\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1}{<} & R^{p-1}. \end{array}$$

Oletus oli, että pätee sekä $\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1$ että $R^p \geq 1$. Jos näin olisi pätisi yllä olevan laskun mukaan

$$R^p < R^{p-1},$$

mutta se ei voi pitää paikkaansa, kun $R^p \geq 1$. Epäyhtälöt $\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1$ ja $R^p \geq 1$ eivät voi siis pitää yhtäaikaa paikkaansa. Näin ollen jos $\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1$, niin $R < 1$, eli karakteristisen yhtälön juurten täytyy sijaita yksikköympyrän sisäpuolella ja IVF:n täytyy olla stabiili (s. 34).

Tehtävä on peräisin Smithiesin (1942) *Econometrica*-artikkelista The Stability of Competitive Equilibrium.

4. Merkitään p. asteen differenssiyhtälössä y_{t-i}:den kertoimia ϕ_i:llä, $i = 1, \ldots, p$.

a) Jos $\phi = 0$, niin tehtävän differenssiyhtälö typistyy 1. asteen differenssiyhtälöksi, jossa $\phi_1 = 1$. Tällöin IVF ei ole stabiili sivun 3 perusteella.

2. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiilius riippuu yhtälön parametreista kuvion 1.5 osoittamalla tavalla. Parametriparit suoralla $\phi_1 = 1$ liittyvät stabiileihin IVF:hin, kun ϕ_2 on rajoitettu välille $(-1, 0)$. Tehtävän differenssiyhtälön IVF on siis stabiili, kun $\phi = (-1, 0)$.

Huom1. Tilanne $\phi = 0$ (epästabiili IVF) voidaan tulkita 2. asteen differenssiyhtälöksi, jossa $\phi_2 = 0$. Piste $(\phi_1, \phi_2) = (1, 0)$ sijaitsee kuvion 1.5 kolmion reunalla. Kolmion reunalla olevat pisteet liittyvät siis epästabiilin IVF:n tuottaviin (ϕ_1, ϕ_2)-kombinaatioihin.

Huom2. Pienikin ero ϕ_2:n suuruudessa ratkaisee, onko IVF stabiili vai ei! ($\phi = 0 \Rightarrow$epästabiili; $\phi = -0.0001 \Rightarrow$stabiili.)

b) Karakteristinen yhtälö [1.2.16] on 5. asteen differenssiyhtälön tilanteessa

$$\lambda^5 - \phi_1\lambda^4 - \phi_2\lambda^3 - \phi_3\lambda^2 - \phi_4\lambda - \phi_5 = 0.$$

Valitaan tässä $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \phi$ ja $\phi_3 = -\phi/2$, $\phi_4 = \phi/2$ ja $\phi_5 = -\phi$ (tehtävän differenssiyhtälö on $y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-2} + (-\phi/2)y_{t-3} + (\phi/2)y_{t-4} - \phi y_{t-5} + w_t$). Saadaan

$$\lambda^5 - \lambda^4 - \phi\lambda^3 - (-\frac{\phi}{2})\lambda^2 - \frac{\phi}{2}\lambda - (-\phi) = 0.$$

Yhtälöllä on juuri λ:n arvolla 1:

$$1^5 - 1^4 - \phi 1^3 + \frac{\phi}{2}1^2 - \frac{\phi}{2}1 + \phi = 0.$$

Karakteristisen yhtälön kaikki juuret eivät ole itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi, joten differenssiyhtälön IVF ei ole stabiili millään ϕ:n arvolla.

c) Erityistapaus on 1. asteen differenssiyhtälö, jossa y_{t-1}:n kerroin määrää IVF:n stabiiliuden.

d) Karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \lambda^{p-i} = 0.$$

Edellisen kohdan tapaan sillä on juuri λ:n arvolla 1:

$$1^p - \sum_{i=1}^{p} \phi_i 1^{p-i} = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 0,$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus seuraa oletuksesta $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$.

e) Ehto $\sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$ ei ole riittävä stabiiliudelle. Tarkastellaan 2. asteen differenssiyhtälöä käsittelevää kuviota 1.5. Stabiileihin IVF:hin liittyvät ϕ_i-arvot rajautuvat kuvioon piirrettyyn kolmioon. Kolmion oikea reuna on osa suoraa $\sum_{i=1}^{2} \phi_i = 1$. Suoran "lounaispuolella" pätee $\sum_{i=1}^{2} \phi_i < 1$, mutta vain kolmion sisäpisteet niistä liittyvät stabiileihin IVF:hin. Näin ollen $\sum_{i=1}^{2} \phi_i < 1$ on välttämätön mutta ei riittävä ehto 2. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle.

Huom. Ehto $\sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$ on välttämätön myös p. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle.

f) Ehto $\sum_{i=1}^{2} |\phi_i| < 1$ on riittävä ehto 2. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle. Tarkastellaan taas kuviota 1.5. Helposti nähdään, että ehto pätee ainakin kolmion sisällä, jonka rajaavat koordinaatit $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$. Itseisarvomerkkien takia ehto pätee myös origon ympärille "muihin suuntiin" piirrettävien vastaavien kolmioiden sisällä. Näin ollen ehto pätee neliön sisällä, jonka rajaavat koordinaatit $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ ja $(1,0)$. Neliö sijaitsee kuvioon piirretyn varsinaisen "stabiilisuuskolmion" sisällä, joten ehto on riittävä muttei välttämätön stabiiliudelle.

Huom. Ehto $\sum_{i=1}^{p} |\phi_i| < 1$ on riittävä myös p. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle (HT 2.3).

Huom! Edellä mainittujen kaltaisia ehtoja on muitakin. Katso esimerkiksi viitteet kirjasta Gandolfo (1997, s. 90–91): *Economic Dynamics*.