STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 1 vastaukset (20.9.)

1.

a) Ominaisarvot ovat oletuksen mukaan liittolukuja (kompleksiset juuret "esiintyvät" liittolukuina), joten voidaan merkitä $\lambda_1 = a + bi$ ja $\lambda_2 = a - bi$ (yhtälöt [1.2.32]–[1.2.33]). Kaavan [1.2.25] (tai [2.3.4–5]) mukaan

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{a+bi}{a+bi-(a-bi)} = \frac{a+bi}{2bi} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2bi} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{ai}{2bi^2} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2b}i \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{a-bi}{a-bi-(a+bi)} = \frac{a-bi}{-2bi} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2bi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{ai}{2bi^2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}i. \end{aligned}$$

Selvästikin c_1 ja c_2 ovat liittolukuja, kun λ_1 ja λ_2 ovat liittolukuja. Edelleen:

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{2b}i + \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}i = 1.$$

b) Kohdassa a) esitettiin c_1 ja c_2 funktioina a:sta ja b:stä. Yhtälöiden [1.2.34]–[1.2.35] mukaan $a = \phi_1/2$ ja $b = (1/2)\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}$. Sijoitetaan nämä arvot kohdan a) kaavoihin:

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\phi_1/2}{2(1/2)\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}i = \frac{1}{2} - \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}i$$

ja

$$c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\phi_1/2}{2(1/2)\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}i = \frac{1}{2} + \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}i.$$

c) Sivun 16 mukaan $c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j = 2R^j[\alpha\cos(\theta j) - \beta\sin(\theta j)]$, jossa $R = 0,9$ ja $\theta = 1,29$ (karakteristisen yhtälön juurten napakoordinaatit). Täytyy siis ratkaista vain α ja β, jotka liittyvät c_1:een ja c_2:een seuraavasti (s. 16):

$c_1 = \alpha + \beta i$ ja $c_2 = \alpha - \beta i$. Kohdasta b) nähdään, että $\alpha = 1/2$ ja $\beta = -\phi_1/[2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}]$, joten ko. differenssiyhtälölle

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

ja

$$\begin{aligned}\beta &= -\frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}\bigg|_{\phi_1=0,5;\phi_2=-0,8} = -\frac{1/2}{2\sqrt{-(1/2)^2 - 4(-4/5)}} \\ &\approx -0,146.\end{aligned}$$

IVF on siis

$$\begin{aligned}\partial y_{t+j}/\partial w_t &\approx 2 * 0,9^j[0,5\cos(1,29j) - (-0,146)\sin(1,29j)] \\ &\approx 0,9^j[\cos(1,29j) + 0,291\sin(1,29j)].\end{aligned}$$

2. Kirjan sivu 730.

3. Kirjan sivu 732.

4. Kirjan sivut 21–22.