STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 12 (7.12.)

1.

a) AR(1)-mallin

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

($t = 1, \ldots, T$; muut merkinnät ilmeiset) SU- ja PNS-estimaattoreiden ($\hat{\phi}_{su}$ ja $\hat{\phi}_{pns}$) asymptoottinen jakauma on $\sqrt{T}(\hat{\phi}_i - \phi) \sim \mathsf{N}(0, 1-\phi^2)$, jossa $i = su$, pns. Näin ollen $\hat{\phi}_i$:n pitäisi noudattaa suurilla havaintomäärillä approksimatiivisesti $\mathsf{N}(\phi, (1-\phi^2)/T)$-jakaumaa. *i)* Laske $\mathsf{N}(0, 1-\phi^2)$-jakauman varianssin suuruus ϕ:n arvoilla $-0,9$, $-0,7$, $-0,5$, $0,1, 0,5$, $0,7$ ja $0,9$. Kommentoi tuloksiasi. *ii)* Laske approksimatiivisen jakauman $\mathsf{N}(\phi, (1-\phi^2)/T)$ varianssit T:n arvolla 100 samoilla ϕ:n arvoilla. Vertaa laskemiasi variansseja Dentin ja Minin (1978) artikkelissa[1] raportoituihin vastaaviin SU- ja PNS-estimaattoreiden empiirisiin (simuloituihin pienotos-) variansseihin.

b) MA(1)-mallin

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

($t = 1, \ldots, T$; muut merkinnät ilmeiset) SU- ja PNS- estimaattoreiden ($\hat{\theta}_{su}$ ja $\hat{\theta}_{pns}$) asymptoottinen jakauma on $\sqrt{T}(\hat{\theta}_i - \theta) \sim \mathsf{N}(0, 1-\theta^2)$, jossa $i = pns$, su. Näin ollen $\hat{\theta}_i$:n pitäisi noudattaa suurilla havaintomäärillä approksimatiivisesti $\mathsf{N}(\theta, (1-\theta^2)/T)$-jakaumaa. *i)* Laske $\mathsf{N}(0, 1-\theta^2)$-jakauman varianssin suuruus θ:n arvoilla $-0,95$, $-0,7$, $-0,5$, $0,1$, $0,7$ ja $0,95$. Kommentoi tuloksiasi. *ii)* Laske approksimatiivisen jakauman $\mathsf{N}(\theta, (1-\theta^2)/T)$ varianssit T:n arvolla 100 samoilla θ:n arvoilla. Vertaa laskemiasi varriansseja Dentin ja Mintin (1978) artikkelissa[2] raportoituihin vastaaviin SU- ja PNS-estimaattoreiden empiirisiin varriansseihin.

[1] J. of Econometrics, 7, 23–55. Taulukko on kurssin kotisivulla.

[2] Taulukko 4 (kurssin kotisivulla). PNS-estimaattoria koskevat tulokset ovat taulukossa kohdassa "Uncond. least sq.".

2. Tutkitaan AR(1)-mallia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{NID}(0, \sigma^2)$ ja $t = 1, \dots, T$.

a) Osoita, että

$$y_t = c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{t=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i, \qquad t = 1, 2, \dots$$

(Vihje: HT 6.5 ja $\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i = (1-\phi^t)/(1-\phi)$.)

b) Oletetaan lisäksi, että ε_t on normaalijakautunut ja yksinkertaisuuden vuoksi, että $\varepsilon_t \sim \mathsf{NID}(0, 1)$. Osoita, että

$$-\frac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c \partial \phi} = \sum_{t=1}^{T} y_{t-1},$$

jossa $l(c, \phi)$ on malliin liittyvän uskottavuusfunktion logaritmi.

c) Osoita, että

$$\mathsf{E}[-T^{-1}\frac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c \partial \phi}] = \frac{c}{1-\phi}(1 - T^{-1}\frac{1-\phi^T}{1-\phi}) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{c}{1-\phi}.$$

3. Tutkitaan AR(1)-mallin (1) SU- (ja PNS-) estimaattoreiden $\hat{c}$ ja $\hat{\phi}$ (HT 11.2) asymptoottista yhteisjakaumaa. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi HT 12.2:n oletukset. Merkitään $\boldsymbol{\theta} = [c \quad \phi]'$. Estimaattoreiden asymptoottinen yhteisjakauma on tällöin multinormaalinen (kaava [5.8.1]):

$$\sqrt{T}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{L} \mathsf{N}\left(\mathbf{0}, \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\right).$$

Yllä "$\xrightarrow{L}$" merkitsee jakaumakonvergenssia ja $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ on malliin liittyvä informaatiomatriisi:

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{I}(c, \phi) = \lim_{T\to\infty} \mathsf{E}\left\{ -T^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c^2} & \dfrac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c \partial \phi} \\ \dfrac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial \phi \partial c} & \dfrac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial \phi^2} \end{bmatrix} \right\}.$$

Suoraviivaisilla mutta pitkähköillä laskuilla saadaan

$$\mathcal{I}(c, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{c}{1-\phi} \\ \dfrac{c}{1-\phi} & \dfrac{1}{1-\phi^2} + \dfrac{c^2}{(1-\phi)^2} \end{bmatrix}$$

((1,2)-elementti laskettiin HT 12.2:n c)-kohdassa) ja

$$\mathcal{I}(c, \phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{c^2(1+\phi)}{1-\phi} & -c(1+\phi) \\ -c(1+\phi) & 1-\phi^2 \end{bmatrix}.$$

a) Mitä matriisin $\mathcal{I}(c, \phi)^{-1}$ elementit kuvaavat?
b) Olkoon $c = 0$. Miten SU-estimaattoreiden varianssit tällöin käyttäytyvät?
c) Olkoon $c \neq 0$. Miten SU-estimaattoreiden varianssit tällöin käyttäytyvät?
d) Olkoon $\phi = 0$. Miten SU-estimaattoreiden varianssit tällöin käyttäytyvät?
e) Olkoon (edelleen) $\phi = 0$. Tällöin vakio c voitaisiin estimoida SU-estimaattorilla $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$ (joka olettaa riippumattomat havainnot), ja $\sqrt{T}(\bar{y} - c) \sim \mathsf{N}(0, 1)$, kun $\sigma = 1$ (kirjan HT 5.3). Kannattaako vakio estimoida (asymptoottisesti estimaattorin varianssin minimoinnin mielessä) estimaattorilla $\bar{y}$ vai AR(1)-malliin liittyvällä SU-estimaattorilla $\hat{c}$, kun $\phi = 0$? Perustele.