STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 11 (30.11.)

1. Oheisissa kuvissa on aikasarjat vanhojen kerrostaloasuntojen hinnan logaritmin kehityksestä ja sen muutoksista pääkaupunkiseudulla 1983/1–2005/4 (neljännesvuosiaineistoja; jälkimmäinen aikasarja 1983/2–2005/4). Tutkitaan jälkimmäistä aikasarjaa ajanjaksolla 1985/2–2005/4 (83 havaintoa). Oheisissa kuvissa ja taulukoissa on sen otosauto- ja otosositaisautokorrelaatiofunktiot.

a) Laske otosauto- ja otosositaisautokorrelaatioiden keskivirheet ja niiden avulla 95 prosentin luottamusvälit auto- ja osittaisautokorrelaatioille (autokorrelaatioiden keskivirheet voit laskea kummalla tahansa luennoilla selitetyistä tavoista). Selitä mitä oletuksia luottamusvälien laskuun liittyy. Piirrä luottamusvälit kuviin.

b) Millainen ARMA-prosessi vaikuttaa tuottaneen muutosaikasarjan? Perustele vastauksesi autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioiden ominaisuuksien ja a)-kohdan vastauksesi avulla.

c) Muutoksiin sovitettiin ARMA-malleja ehdollisella suurimman uskottavuuden menetelmällä[1]. AIC-kriteerit malleille ovat taulukossa alla. Selitä mikä AIC-kriteeri on, miten sitä käytetään ja sen intuitio. Mitä mallia AIC-kriteeri suosittelee muutoksille?

[1] Estimoinnit tehtiin PcGive 10.0:n ARFIMA-modulilla. Tarkalleen ottaen käytetty estimointimenetelmä ei ollut ehdollinen SU-menetelmä, mutta voit vastauksessasi olettaa sen olleen!

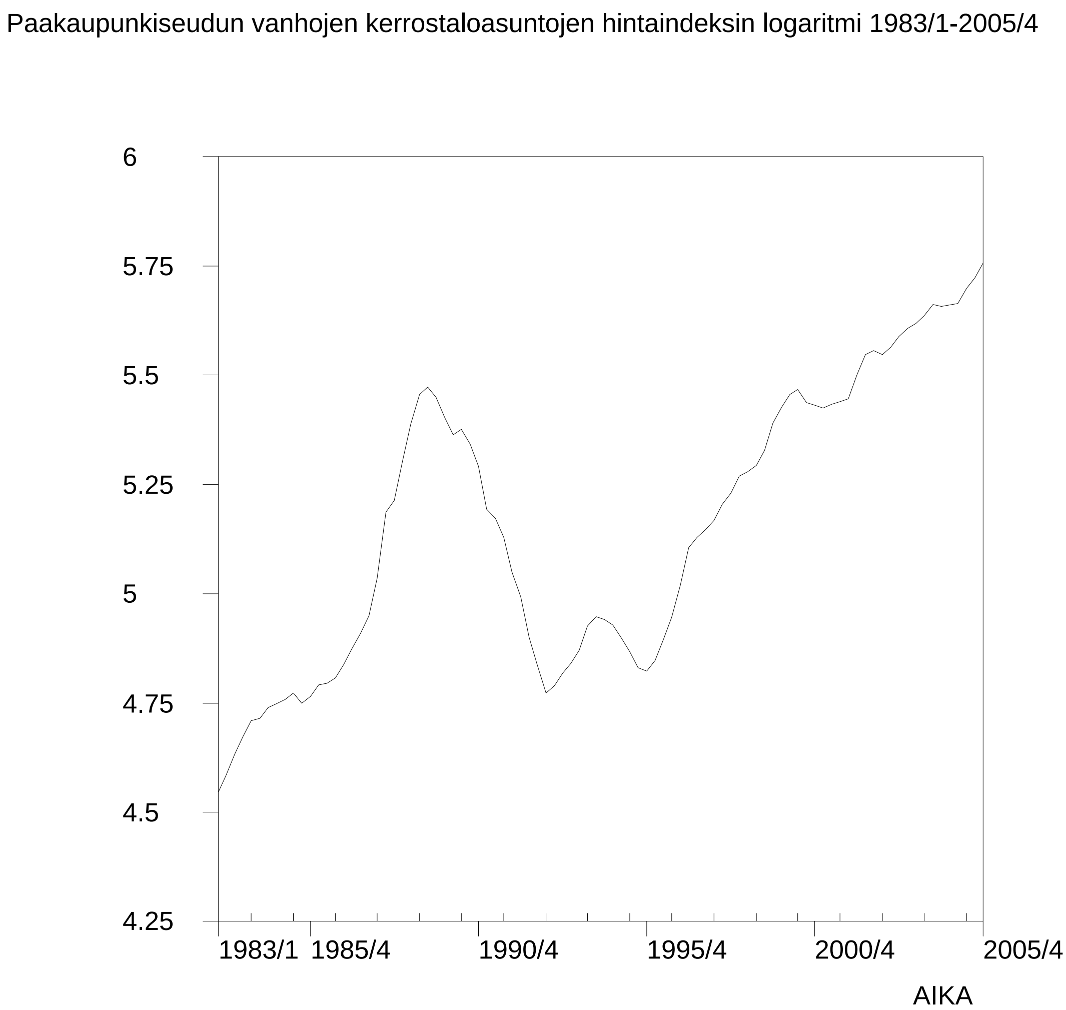

Paakaupunkiseudun vanhojen kerrostaloasuntojen hintaindeksin logaritmi 1983/1-2005/4
6
5.75
5.5
5.25
5
4.75
4.5
4.25
1983/1
1985/4
1990/4
1995/4
2000/4
2005/4
AIKA

Figure 1:

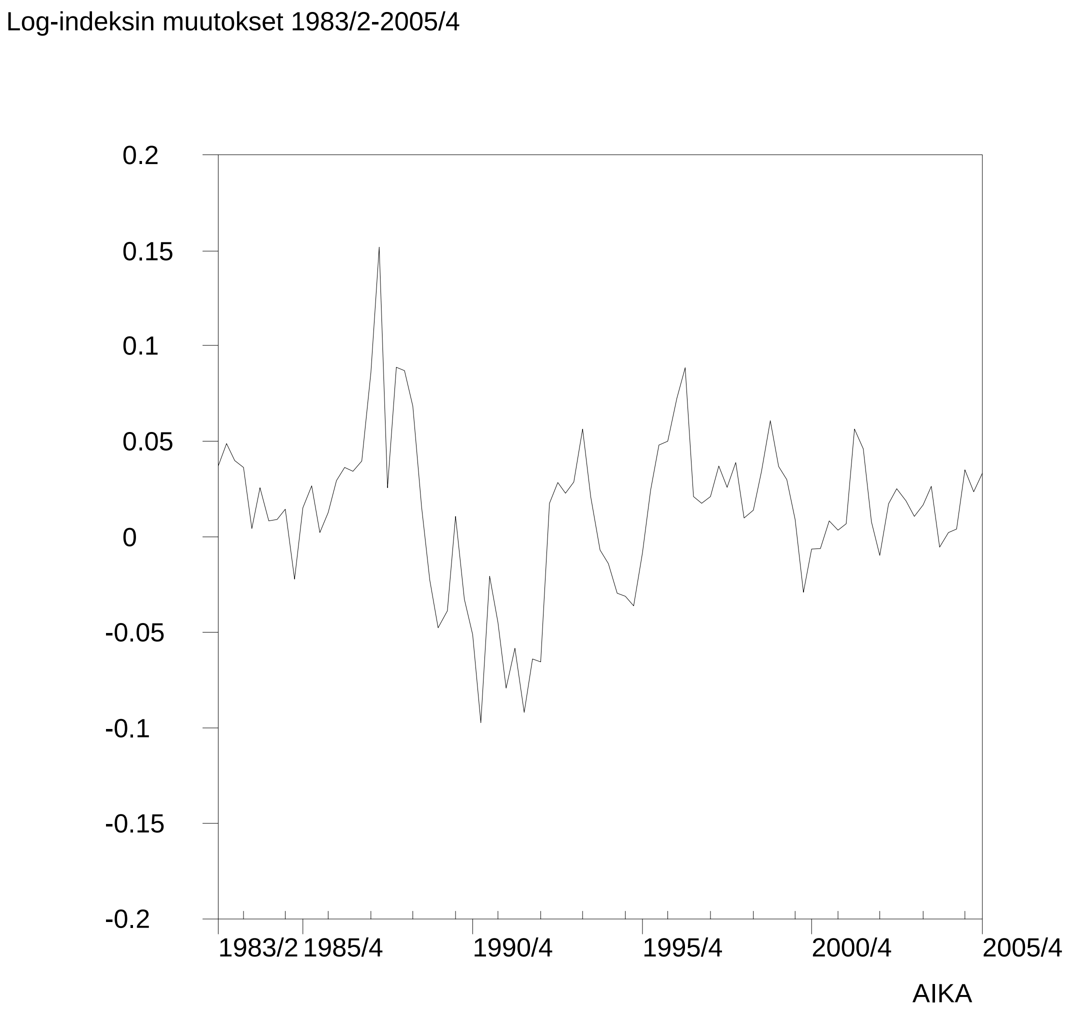
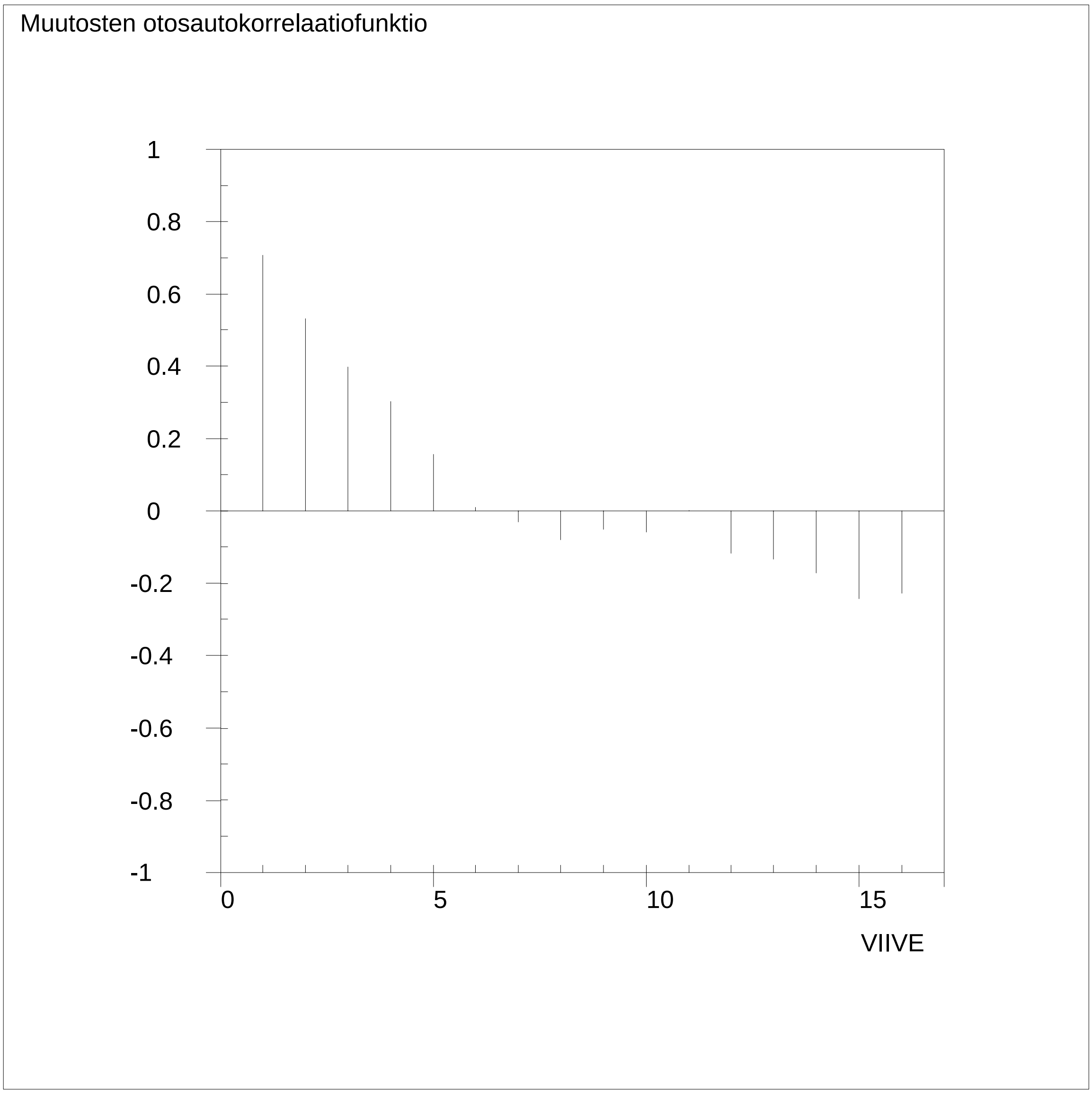
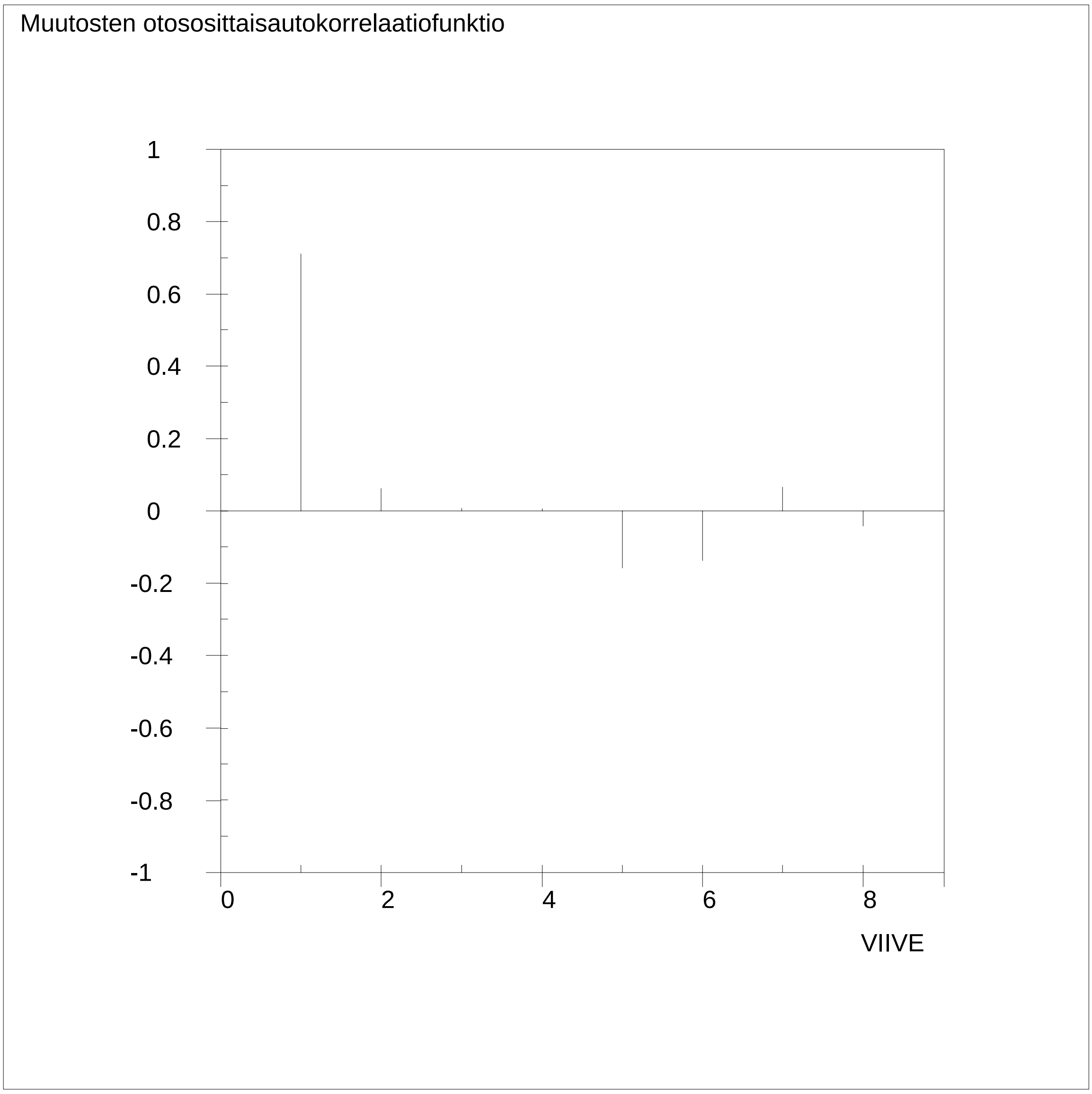

Log-indeksin muutokset 1983/2-2005/4
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
1983/2
1985/4
1990/4
1995/4
2000/4
2005/4
AIKA

Figure 2:



Muutosten otosautokorrelaatiofunktio
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
VIIVE

Figure 3:



Muutosten otosositaisautokorrelaatiofunktio
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
VIIVE

Figure 4:

Viive	Otosautokorrelaatio	Otososittaisautokorrelaatio
1	$0,71$	$0,71$
2	$0,53$	$0,06$
3	$0,40$	$0,01$
4	$0,30$	$0,01$
5	$0,16$	$-0,16$
6	$0,01$	$-0,14$
7	$-0,03$	$0,07$
8	$-0,08$	$-0,04$
9	$-0,05$	$-$
10	$-0,06$	$-$
11	$0,00$	$-$
12	$-0,12$	$-$
13	$-0,13$	$-$
14	$-0,17$	$-$
15	$-0,24$	$-$
16	$-0,23$	$-$

Malli	AIC
AR(1)	$-4,14137$
AR(2)	$-4,12110$
AR(3)	$-4,09707$
AR(4)	$-4,07210$
MA(1)	$-3,87644$
MA(2)	$-4,02999$
MA(3)	$-4,02399$
MA(4)	$-4,05895$
ARMA(1,1)	$-4,12105$
ARMA(2,1)	$-4,11899$
ARMA(1,2)	$-4,09696$
ARMA(2,2)	$-4,09493$

2. Tutkitaan AR(1)-prosessin

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

parametrien SU-estimaattoreita. Oletetaan, että $t = 1, \ldots, T$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{NID}(0, \sigma^2)$. Osoita, että SU-estimaattorit — ehdolla alkuarvo y_0 — ovat

$$\hat{c} = \bar{y} - \hat{\phi}\bar{y}_{-1}$$

ja

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})}{\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2},$$

joissa "^" merkitsee SU-estimaattoria, $\bar{y} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t$ ja $\bar{y}_{-1} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}$. (Vihje: Uskottavuusfunktiossa [5.2.27] korvaa $T-1 \to T$ ja $\sum_{t=2}^{T} \to \sum_{t=1}^{T}$, derivoi uskottavuusfunktio ja ratkaise $\hat{c}$ ja $\hat{\phi}$. Johtaessasi $\hat{\phi}$:n kaavaa hyödynnä yhtäsuuruuksia $\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}) = 0$ ja $\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - T\bar{y}_{-1}^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2$.) Pohdi lyhyesti $\hat{\phi}$:n ja y_t:n ja y_{t-1}:n välisen otoskorrelaatiokertoimen suhdetta.

3. Tutkitaan stationaarista AR(1)-prosessia

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Selitä miksi ϕ:n PNS-estimaattori $\hat{\phi}_{pns}$ on äärellisillä havaintomäärillä yleensä harhainen. (Vihje: $[\hat{c}_{pns} \quad \hat{\phi}_{pns}]' = [c \quad \phi]' + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$ ilmeisin merkinnöin (kaava [8.1.12]). Perustele HT 6.5 a):n perusteella, että $\mathbf{X}$-matriisin ja $\mathbf{u}$-vektorin termit eivät ole riippumattomia, eli että odotusarvo-operaattoria ei voi viedä $\mathbf{u}$-vektorin eteen.)

b) Malli estimoidaan joko ilman vakiota (jolloin oletetaan, että $c = 0$) tai sen kanssa. PNS-estimaattorin $\hat{\phi}_{pns}$ odotusarvolle pätee

$$\mathsf{E}(\hat{\phi}_{pns}) \approx \phi - \frac{2\phi}{T}$$

tai

$$\mathsf{E}(\hat{\phi}_{pns}) \approx \phi - \frac{1 + 3\phi}{T}.$$

Ylempi kaava pätee, kun estimoidussa AR(1)-mallissa ei ole vakiota ja alempi kun mallissa on vakio (Marriot ja Pope (1954) sekä Kendall (1954)). Oletetaan, että havaintoja on käytettävissä "paljon" eli että approksimaatiot ovat tarkkoja. Laske approksimaatioiden avulla $\mathsf{E}(\hat{\phi}_{pns})$:ien suuruus ϕ:n arvoilla $-9/10$, $-1/3$, 0, 1/3 ja 9/10 ja T:n arvoilla 25 ja 100. Kommentoi tuloksiasi.