STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 10 (23.11.)

1. Selitä miten Millsin kirjan taulukossa 2.2 on otosautokorrelaatioiden ja otososittaisautokorrelaatioiden keskivirheet laskettu. Laske keskivirheet itse neljään ensimmäiseen viipeeseen liittyen ja keskivirheiden perusteella luottamusvälit edellä mainittujen suureiden teoreettisille vastineille. Saitko samat luvut kuin Mills? Mitä oletuksia luottamusvälien laskuun liittyy? Miksi taulukon mukaan AR(2)-malli vaikuttaa oikealta?

2. Pohditaan heikosti stationaarisen prosessin $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ autokovarianssien γ_j ($j > 0$) estimointia aikasarjan y_t, $t = 1, \ldots, T$, perusteella. Usein käytetty estimaattori[1] on

$$\hat{\gamma}_j = T^{-1} \sum_{t=j+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}),$$

jossa $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$ ja $j = 0, 1, \ldots, T$ (kaava [4.8.6]). Yksi vaihtoehtoinen estimaattori[1] on

$$\tilde{\gamma}_j = (T - j)^{-1} \sum_{t=j+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y}).$$

Mikäli tutkittavan prosessin odotusarvon tiedettäisiin olevan μ, niin tällöin vastaavat estimaattorit olisivat

$$\hat{\gamma}_j^{\mu} = T^{-1} \sum_{t=j+1}^{T} (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)$$

ja

$$\tilde{\gamma}_j^{\mu} = (T - j)^{-1} \sum_{t=j+1}^{T} (y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu).$$

a) Osoita, että $\tilde{\gamma}_j^{\mu}$ on harhaton estimaattori ja että $\hat{\gamma}_j^{\mu}$ on harhainen estimaattori paitsi jos y_t on valkoista kohinaa tai $j = 0$ (jolloin $\tilde{\gamma}_j^{\mu} = \hat{\gamma}_j^{\mu}$).

b) Estimaattorit $\tilde{\gamma}_j$ ja $\hat{\gamma}_j$ ovat molemmat yleensä harhaisia vaikka $\tilde{\gamma}_j^{\mu}$ on harhaton. Kohdan a) perusteella saattaisi olettaa, että $\tilde{\gamma}_j$ on aina harhattomampi estimaattori kuin $\hat{\gamma}_j$. Näin ei kuitenkaan ole. Oletetaan, että y_t on

[1] Esim. Box ja Jenkins (1976, s. 32): Time series analysis: forecasting and control.
[1] Esim. Kendall (1949): The estimation of parameters in linear autoregressive time series. Econometrica, 17, 44–57.

valkoista kohinaa. Osoita, että tällöin $\tilde{\gamma}_j$ on harhaisempi estimaattori kuin $\hat{\gamma}_j$, kun $0 < j \leq T-1$ ja että estimaattorit ovat yhtä harhaisia, kun $j = 0$.

3. Lasketaan aikasarjan y_t, $t = 1, \ldots, T$, otosautokovarianssit $\hat{\gamma}_j$. Määritellään $\hat{\gamma}_j = T^{-1} \sum_{t=j+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y})$ ja $\hat{\gamma}_{-j} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T-j} (y_t - \bar{y})(y_{t+j} - \bar{y})$, joissa $j \geq 0$. Näillä merkinnöillä $\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_{-j}$.

a) Osoita, että

$$\sum_{j=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_j = 0$$

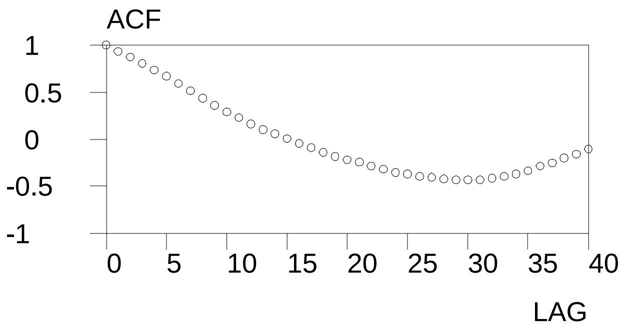
ja siten

$$\sum_{j=1}^{T-1} \hat{\rho}_j < 0,$$

jossa $\hat{\rho}_j = \hat{\gamma}_j / \hat{\gamma}_0$. (Vihje: Laadi matriisi, jonka (i, j)'s termi on $(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})$. Pohdi matriisin kaikkien diagonaalien sekä rivien termien summan suuruuksia.)

b) Olkoon kyseen omainen aikasarja generoitu prosessista, jonka kaikki teoreettiset autokorrelaatiot ovat positiivisia (esim. AR(1)-prosessi, jossa AR-kerroin on positiivinen tai MA(q)-prosessi, jossa kaikka MA-kertoimet ovat positiivisia). Voivatko kaikki otosautokorrelaatiot $\hat{\rho}_j$ ($j = 1, \ldots, T-1$) olla positiivisia? Perustele.

c) Olkoon ko. aikasarja sellainen, että havainnot noudattavat karkeasti lineaarista trendiä (ja $T = 41$). Tällöin otosautokorrelaatiofunktio näyttää tyypillisesti oheisen kuvan kaltaiselta.



Miksi ensimmäiset otosautokorrelaatiot ovat positiivisia ja kaukaiset negatiivisia? Kommentoi kuviota a)-kohdan perusteella.

4. Olkoon T (≥ 4) parillinen luku ja olkoon aikasarjasta (y_t) T havaintoa. Otosautokorrelaatio viipeelle j on

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2},$$

jossa $\bar{y} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t$. Tavanomainen y_t:n ja y_{t-j}:n välinen korrelaatiokerroin on

$$\hat{\rho}_j^* = \frac{\sum_{t=j+1}^{T}(y_t - \bar{y}_j)(y_{t-j} - \bar{y}_{-j})}{\sqrt{\sum_{t=j+1}^{T}(y_t - \bar{y}_j)^2 \sum_{t=j+1}^{T}(y_{t-j} - \bar{y}_{-j})^2}},$$

jossa $\bar{y}_j = (T-j)^{-1}\sum_{t=j+1}^{T} y_t$ ja $\bar{y}_{-j} = (T-j)^{-1}\sum_{t=1}^{T-j} y_t$. Tutkitaan $\hat{\rho}_j$:n ja $\hat{\rho}_j^*$:n eroa.

a) Laske $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ ja $\hat{\rho}_1^*$, kun $y_1 = a$, $y_2 = -a, \ldots, y_{T-1} = a, y_T = -a$ ja $a \neq 0$. Ovatko laskemasi otosautokorrelaatiot intuitiosi mukaisia? Onko $\hat{\rho}_1$:n ja $\hat{\rho}_1^*$:n ero suuri vai pieni?

b) Voitko laskea $\hat{\rho}_j$:n tai $\hat{\rho}_j^*$:n, kun $y_1 = \ldots = y_T = a$? Perustele vastauksesi analyyttisesti ja tavanomaisen korrelaatiokertoimen $\hat{\rho}_j^*$ osalta myös geometrisesti piirtämällä y_t:n ja y_{t-j}:n hajontakuvio.

c) Laske $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_1^*$ ja $\hat{\rho}_{T-1}$, kun $y_1 = \ldots = y_{T/2} = -a$ ja $y_{T/2+1} = \ldots = y_T = a$ ja $a \neq 0$. Ovatko $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_1^*$ ja $\hat{\rho}_{T-1}$ intuitiosi mukaisia? Onko $\hat{\rho}_1$:n ja $\hat{\rho}_1^*$:n ero suuri vai pieni? Perustele (esimerkiksi geometrisesti), että $\hat{\rho}_j^*$:a ei voi laskea, jos $j > T/2$.