STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 9 (16.11.)

Palautetaan mieleen Todennäköisyyslaskennan kurssilta kvadraattisen konvergenssin käsite: Jono satunnaismuuttujia $\{X_T\}$ konvergoi kvadraattisesti vakioon c, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa N siten, että kaikille $N \geq T$ pätee

$$\mathsf{E}(X_T - c)^2 < \varepsilon$$

(esim. Hamiltonin kirjan s. 183). Käsitettä tarvitaan tehtävissä 2–3 — mutta ei kokeessa.

1. Noudattakoon x_t MA(1)-prosessia

$$x_t = u_t + \delta u_{t-1},$$

jossa u_t on valkoista kohinaa eli $\mathsf{E}(u_t) = 0$, $\mathsf{E}(u_t^2) = \sigma_u^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(u_t u_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$. Prosessi y_t on

$$y_t = x_t + v_t,$$

jossa v_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(v_t^2) = \sigma_v^2$) eikä korreloi u_t:n kanssa. Oletetaan, että u_t ja v_t havaitaan. Osoita, että

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+1} | u_t, u_{t-1}, v_{t-1}) = \delta u_t.$$

Johda siis oleellisesti kaava kirjan sivulla 105. (Vihje: Kaava [4.1.10].)

2. Noudattakoon aikasarja y_t MA(∞)-prosessia

$$y_t - \mu = \psi(L)\varepsilon_t,$$

jossa $\psi(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j L^j$, L on viiveoperaattori, $\psi_0 = 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ ja ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$). Kaavan [4.2.4] mukaan keskineliövirheen mielessä paras lineaarinen ennuste y_{t+s}:lle on

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+s} | \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = \mu + \psi_s \varepsilon_t + \psi_{s+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2}\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

Osoita, että $\hat{\mathsf{E}}(y_{t+s} | \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$ konvergoi kvadraattisesti μ:hyn kun s suurenee kohti ääretöntä.

3. Olkoon $y_t = \varepsilon_t + \kappa^{(i)}$, jossa ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$), $\mathsf{E}(\kappa^{(i)}) = 0$, $\mathsf{var}(\kappa^{(i)}) = \sigma_\kappa^2$ ja $\mathsf{cov}(\kappa^{(i)}, \varepsilon_{t-j}) = 0$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ($\kappa^{(i)}$ on vakio kullekin prosessista generoidulle i. aikasarjalle.) Osoita, että $\kappa^{(i)}$ on kirjan s:lla 109 määritellyn Woldin hajotelman κ_t ja että $y_t = \varepsilon_t + \kappa^{(i)}$ on prosessin Woldin hajotelma. (Vihje: Osoita, että $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j}$ konvergoi kvadraattisesti $\kappa^{(i)}$:hin.)