STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 8 (9.11.)

1. Internet-tietosanakirjassa Wikipedia kuvattiin (13.10.2006) tiukkaa (strict) ja heikkoa (weak) stationaarisuutta näin:

"In the mathematical sciences, a stationary process (or strict(ly) stationary process) is a stochastic process whose probability distribution at a fixed time or position is the same for all times or positions. As a result, parameters such as the mean and variance also do not change over time or position. – – A weaker form of stationarity commonly employed in signal processing is known as weak-sense, wide-sense stationarity (WSS), second-order stationarity or covariance stationarity. WSS random processes only require that 1st and 2nd moments do not vary with respect to time."

a) Mikä virhe on tiukan stationaarisuuden kuvauksessa?

b) Mikä virhe on heikon stationaarisuuden kuvauksessa?

2. Olkoon ε_t riippumatonta valkoista kohinaa eli $\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$ ja lisäksi ε_t ja ε_{t-j} ovat riippumattomia kaikille $j \neq 0$. Muodostetaan uusi aikasarja $\zeta_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}$.

a) Osoita, että ζ_t on valkoista kohinaa.

b) Oletetaan, että ε_{t-j}:t, $j = 0, 1, \ldots$, ovat tunnettuja. Pystytkö ennustamaan ζ_{t+1}:tä (niin että ennusteen keskineliövirhe on pienempi kuin ζ_t:n varianssi)?!

3. Olkoon matriisi $\mathbf{A}$ muotoa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että $\mathbf{A}^{-1}$ on muotoa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^{21} & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Lasku liittyy kolmiohajotelman $\mathbf{\Omega} = \mathbf{ADA}'$ yksikäsitteisyystodistukseen sivulla 91.

Vihje1: Induktiotodistus, eli osoita ensin, että $\mathbf{A}^{-1}$:tä koskeva väite pätee 2×2 -matriisille. Vihje 2: Jos

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}' & 1 \end{bmatrix},$$

niin

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}' & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}'\mathbf{A}_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Todista seuraavat kirjassa esitetyt väitteet.

a) S. 99: "The block-diagonality of $\bar{\mathbf{D}}$ implies that the product of any element of $\tilde{\mathbf{Y}}_2$ with any element of $\mathbf{Y}_1$ has expectation zero."

b) S. 99 (kaava [4.5.28]): $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{Y}}_2\tilde{\mathbf{Y}}_2') = \bar{\mathbf{D}}_{22}$. (Saman tien voit todistaa, että $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{Y}}') = \bar{\mathbf{D}}$.)

c) S. 100: "– – we need to show that the difference between $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1)$ and $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)$ is uncorrelated with $\mathbf{Y}_1$."

5. Tutkitaan kahta satunnaismuuttujavektoria $\mathbf{Y}_1$ $(n_1 \times 1)$ ja $\mathbf{Y}_2$ $(n_2 \times 1)$, joille pätee $\mathsf{E}(\mathbf{Y}_i) = \boldsymbol{\mu}_i$, $\mathsf{E}[(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\mu}_i)'] = \mathbf{\Omega}_{ii}$ $(i = 1, 2)$ ja $\mathsf{E}[(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'] = \mathbf{\Omega}_{21}$.

a) Osoita, että MSE:llä mitattuna optimaalinen lineaarinen ennuste $n_i \times 1$-vektorille $\mathbf{Y}_i$ on

$$\hat{\mathsf{E}}(\mathbf{Y}_i|\,1) = \boldsymbol{\mu}_i,$$

kun ehdollistava informaatio on vakio. (Vihje: Kaava [4.1.23].)

b) Osoita, että MSE:llä mitattuna optimaalinen lineaarinen ennuste $\mathbf{Y}_2$:lle on

$$\hat{\mathsf{E}}(\mathbf{Y}_2|\,\mathbf{Y}_1, 1) = \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1),$$

kun ehdollistava informaatio on $\mathbf{Y}_1$ ja vakio. (Tulosta käytetään sivulla 102. Vihje: Kaava [4.5.30].)