STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 7 (2.11.)

1.

a) Johda optimaalinen lineaarinen ennuste y_{t+1}:lle, kun käytät vain viivästettyä havaintoa y_{t+1-j} ($j = 1, 2, \ldots$) (ei vakiota) ehdollistavana informaationa ennusteen laatimisessa ja y_t on heikosti stationaarinen prosessi.

b) Osoita, että a)-kohdan optimaalinen ennuste on muotoa $y_{t+1} = \rho_j y_{t+1-j}$ (ρ_j on prosessin j. autokorrelaatio), kun prosessin odotusarvo on nolla.

c) Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ heikosti stationaarista AR(2)-prosessia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

jossa ε_t on valkoista kohinaa. Laadi optimaalinen lineaarinen ennuste (αy_t) y_{t+1}:lle käyttämällä ehdollistavana informaationa ainoastaan viivettä y_t, eli sovita AR(1)-malli AR(2)-prosessiin. Miten parametrit α, ϕ_1 ja ϕ_2 liittyvät toisiinsa?

2. Olkoon $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ valkoista kohinaa. Tutkitaan MA(1)-prosessia

$$y_t = (1 - L)\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}.$$

(Prosessin voidaan sanoa olevan *ylidifferensoitu*, koska jo alkuperäinen prosessi oli heikosti stationaarinen.)

a) Osoita, että y_t on heikosti stationaarinen prosessi.

b) Onko y_t kääntyvä prosessi? Onko olemassa toista yhtäpitävää MA(1)-prosessia?

c) Ajatellaan, että aikasarjojen ε_t tai y_t historiaa ei ole käytettävissä, että sen odotusarvon tiedetään olevan nolla ja että tehtävänä on ennustaa y_{t+1}:n arvo. Ennusteena joudutaan käyttämään siten odotusarvoa. Mikä on tällaisen ennusteen keskineliövirhe?

d) Tehdään lineaarinen ennustemalli y_{t+1}:lle käyttäen ainoastaan y_t:tä ehdollistavana informaatiojoukkona:

$$y_{t+1} = \alpha y_t.$$

Osoita, että $\alpha = -1/2$. Mikä on ennusteen keskineliövirhe? Vertaa sitä keskineliövirheeseen, kun ennustefunktiona on odotusarvo (kohta c)).

e) Ajatellaan innovaatioiden ε_t aikaisemmat arvot tunnetuiksi ja ennustetaan y_{t+1}:tä niiden avulla. Mikä on ennuste ja mikä on ennusteen keskineliövirhe? Vertaa keskineliövirhettä edellisissä kohdissa laskettuihin keskineliövirheisiin.

f) Voitko käyttää Wiener–Kolmogorov -kaavaa [4.2.16]

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}\,|y, y_{t-1}, \ldots) = \mu + \left[\frac{\psi(L)}{L^s}\right]_+ \frac{1}{\psi(L)}(y_t - \mu)$$

y_{t+1}:n ennustamiseen?

3. Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ heikosti stationaarista ARMA(p,q)-prosessia

$$(1-\phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)y_t = (1+\theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t,$$

jossa ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$) ja $p,q < \infty$. Prosessiin liittyvät parametrit oletetaan tunnetuiksi. Empiirikolle on annettu kiireelliseksi tehtäväksi ennustaa y_{t+k}, $k = 1, 2, \ldots$, sekä arvio ennusteen keskineliövirheestä (MSE). Empiirikko laskee ennusteen y_{t+k}:lle aikasarja-analyysin kurssilla opetetulla tavalla (Hamiltonin kirjan 4. luku) mutta käyttää kiireessä MSE:n laskuun kaavaa $k\sigma^2$, jota hän on joskus nähnyt käytettävän tähän tarkoitukseen. Osasiko empiirikko kiireessäkin toimia järkevästi, eli onko $k\sigma^2$ hyvä approksimaatio ennustevirheen MSE:lle? (Perusteltu sanallinen vastaus riittää.)

4. Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ARMA(1,1)-prosessia

$$(1-\phi L)(y_t - \mu) = (1+\theta L)\varepsilon_t,$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0,\sigma^2)$, $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$ ja $\phi \neq -\theta$. Pohditaan y_t:n ennustamista. Johda kaava

$$\hat{y}_{t+s|t} - \mu = \phi(\hat{y}_{t+s-1|t} - \mu),$$

jossa $s = 2, 3, \ldots$ ja merkinnät ovat kirjassa käytettyjä (s. 84).

5. Suomalainen vakuutusmatemaatikko kertoi, että hänen yrityksessään on laskettu (positiivisia arvoja saanut) ennuste, joka on ensin arvoltaan "pieni", sitten "suuri" ja sen jälkeen suppenee kohti (estimoitua) odotusarvoansa. Vakuutusmatemaatikko väitti, että kaksi ensimmäistä ennustetta lähitulevaisuuteen eivät ole järkeviä, koska tilastotieteellisesti perustellun ennusteen tulisi supeta monotonisesti kohti odotusarvoaan. Pohdi väitteen paikkansapitävyyttä esimerkiksi (heikosti stationaarisen) ARMA-prosessin ennusteiden ominaisuuksien perusteella.