STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 6 (19.10.)

1. Internet-tietosanakirjassa Wikipedia kuvattiin (13.10.2006) tiukkaa (strict) ja heikkoa (weak) stationaarisuutta näin:

"In the mathematical sciences, a stationary process (or strict(ly) stationary process) is a stochastic process whose probability distribution at a fixed time or position is the same for all times or positions. As a result, parameters such as the mean and variance also do not change over time or position. – – A weaker form of stationarity commonly employed in signal processing is known as weak-sense, wide-sense stationarity (WSS), second-order stationarity or covariance stationarity. WSS random processes only require that 1st and 2nd moments do not vary with respect to time."

a) Mikä virhe on tiukan stationaarisuuden kuvauksessa?

b) Mikä virhe on heikon stationaarisuuden kuvauksessa?

2. Tutkitaan MA(1)-prosessia

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \tag{3}$$

jossa $|\theta| \geq 1$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Onko prosessi kääntyvä? Perustele vastauksesi yhtälön [3.7.13] avulla. Onko prosessi heikosti stationaarinen?

b) Osoita rekursiivisesti sijoittamalla $\varepsilon_i = y_i - \theta\varepsilon_{i-1}$ yhtälöön (3), että pätee

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} -(-\theta)^{i+1} y_{t-1-i} - (-\theta)^{t+1}\varepsilon_{-1} + \varepsilon_t. \tag{4}$$

c) Saavatko "kaukaiset" (i lähellä $t-1$:tä) y_{t-1-i}:n viipeet (itseisarvoltaan) suuremman vai pienemmän painon kuin "läheiset" (i lähellä 0:a). Vaikuttaako uusi innovaatio (ε_t) enemmän vai vähemmän kuin kaukainen (ε_{-1}) y_t:hen? Ovatko nämä seikat mielestäsi intuitiivisia ja empiirisesti mielekkäitä? Tuottaako rekursiivinen sijoittaminen ja aikaindeksin t kasvattaminen kohti ääretöntä AR(∞)-esityksen MA(1)-prosessille (3)? Entä jos pätisi $|\theta| < 1$?

3. Tutkitaan MA(1)-prosessin kääntymätöntä ja kääntyvää esitystä tarkemmin. Kirjan sivulla 65 kuvataan, kuinka *i)* arvotaan tietokoneelle innovaatiot ($\widetilde{\varepsilon}$) *ii)* tuotetaan kääntymätön MA(1)-prosessi ($\widetilde{y}_t$) niiden avulla *iii)* lasketaan uudet innovaatiot (ε_t) $\widetilde{y}_t$:n menneiden arvojen avulla ja niiden huomataan olevan valkoista kohinaa *iv)* tuotetaan kääntyvä MA(1)-prosessi y_t uusien innovaatioiden avulla ja huomataan, että $y_t = \widetilde{y}_t$. Tee sama analyysi sinulle tutulla tilasto-ohjelmistolla! Tarkista, että $\varepsilon_t \neq \widetilde{\varepsilon}_t$.

Valitse itse laskuissasi käyttämä MA-parametrin arvo (yksinkertaisuuden vuoksi oleta, että prosessin $\widetilde{y}_t$ odotusarvo $\mu = 0$). Huomioi, että laskiessasi ε_t:itä joudut approksimoimaan ääretöntä summaa [3.7.8]

$$\varepsilon_t = \widetilde{y}_t - \theta\widetilde{y}_{t-1} + \theta^2\widetilde{y}_{t-2} - \theta^3\widetilde{y}_{t-3} + \cdots$$

äärellisellä (esim. 11 termiä pitkällä) summalla, ja että approksimaatiosi tarkkuus riippuu θ:n suuruudesta.

Jos käytät Survo-ohjelmistoa, niin seuraavat komentorivit ovat ehkä avuksi:

```
* PATH D:\STUDENT
* FILE CREATE D:\STUDENT\MA1SIMU
* FIELDS:
* 1 N 8 OBS
* 2 N 8 EW
* 3 N 8 YW
* 4 N 8 E
* 5 N 8 Y
* END
* FILE INIT MA1SIMU,10000
* VAR OBS=ORDER TO MA1SIMU
* VAR EW=N.G(0,1,RND(835091127)) TO MA1SIMU
* VAR YW=EW+5*EW[-1] TO MA1SIMU / IND=OBS,2,10000
* GPLOT MA1SIMU,OBS,YW / LINE=1 IND=OBS,500,600 YSCALE=-15(5)15 TICK=1
* VAR E=YW-0.2*Y[-1]+(0.2)^2*YW[-2]-(0.2)^3*YW[-3]+(0.2)^4*YW[-4] jne.
* XCORR MA1SIMU,EW,E,CUR+1 / MAXLAG=20 IND=OBS,12,10000
* FILE LOAD MA1SIMU,CUR+1 / IND=OBS,500,510
* STAT MA1SIMU,CUR+1 / IND=OBS,12,10000
* VAR Y=E+0.2*E[-1] TO MA1SIMU / IND=OBS,13,10000
* FILE LOAD MA1SIMU,CUR+1 / IND=OBS,500,510
```

4. Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ heikosti stationaarista ARMA(p,q)-prosessia

$$(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)y_t = (1 + \theta_1 L + \ldots + \theta_q L^q)\varepsilon_t,$$

jolla on MA(∞)-esitys

$$y_t = (1 + \psi_1 L + +\psi_2 L^2 + \ldots)\varepsilon_t.$$

Osoita, että yhtälöiden parametreja sitovat kaavat

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1, \\ \psi_j &= \theta_j + \textstyle\sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i \psi_{j-i}, \quad j = 1, \ldots, q \\ \psi_j &= \textstyle\sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i \psi_{j-i}, \quad j > q. \end{aligned}$$

Tulkitse kaavat. Viittaa vastauksessasi differenssiyhtälöiden teoriaan.

5. Tarkastelun kohteena on AR(1)-prosessi

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

jossa c on vakio, $|\phi| < 1$ ja ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$). Aikasarjaa on alettu tuottamaan ajankohdalla 1.

a) Oletetaan, että alkuarvo y_0 on mielivaltainen kiinteä luku. Onko prosessi heikosti stationaarinen? Entä jos aikasarjaa on lähdetty tuottamaan odotusarvostaan $y_0 = c/(1 - \phi)$?

b) Oletetaan, että alkuarvo y_0 on satunnaismuuttuja s.e. $\mathsf{E}(y_0) = c/(1 - \phi)$, $\mathsf{var}(y_0) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$ ja y_0 on riippumaton ε_t:stä kaikilla t:n arvoilla. Osoita, että prosessi on heikosti stationaarinen. Laskutyön yksinkertaistamiseksi voit olettaa, että $c = 0$.