STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 5 (12.10.)

1. Noudattakoon y_t AR(2)-prosessia (Yule-prosessia)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

jossa $\phi_1 = 1/3$, $\phi_2 = 2/9$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Osoita, että prosessi on heikosti stationaarinen.

b) Laske prosessin autokorrelaatiofunktion arvot viipeille 1, 2, 3 ja 4 rekursiivisesti käyttäen kaavaa $\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}$. Miten autokorrelaatiot käyttäytyvät?

2.

a) Osoita, että AR(2)-prosessin

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

autokorrelaatiofunktion suljettu muoto on

$$\rho_j = \frac{\lambda_1(1-\lambda_2^2)\lambda_1^j - \lambda_2(1-\lambda_1^2)\lambda_2^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1+\lambda_1\lambda_2)},$$

kun karakteristisen yhtälön juuret λ_1 ja λ_2 ovat erisuuria. (Vihje: Yleinen ratkaisu 2. asteen differenssiyhtälölle, jota autokorrelaatiot noudattavat, on muotoa $A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$. Ks. tiivistelmä "Differenssiyhtälöiden ratkaisuista".) Onko funktio sama kuin AR(2)-prosessin impulssivastefunktio $\partial y_{t+j}/\partial \varepsilon_t$?

b) Osoita, että tehtävässä 1 annetuilla parametriarvoilla autokorrelaatiofunktio on muotoa

$$\rho_j = \frac{16}{21}(\frac{2}{3})^j + \frac{5}{21}(-\frac{1}{3})^j.$$

Miten kaava liittyy 2. asteen differenssiyhtälön yleiseen ratkaisuun?

c) Tarkista b)-kohdan kaavoilla tehtävässä 1 laskemasi autokorrelaatiofunktion numeeriset arvot.

3. Aikasarja y_t noudattaa MA(1)-prosessia

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1},$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Osoita, että y_t:n ensimmäinen autokorrelaatio ρ_1 on suurimmillaan $0,5$, pienimmillään $-0,5$ ja että se saa nämä arvot θ:n arvoilla 1 ja -1.

b) Olkoon $\theta = 0,005$. Mikä on ρ_1? Onko prosessi stationaarinen? Onko se kääntyvä?

c) Olkoon $\theta = 200$. Mikä on ρ_1? Onko prosessi stationaarinen? Onko se kääntyvä?

d) Oletetaan nyt, että kohtien b) ja c) prosessit ovat vaihtoehtoisia kuvauksia (kääntyvä ja kääntymätön) samasta prosessista y_t ja merkitään $\mathsf{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Käytetään kohdan c) tilanteessa seuraavia merkintöjä:

$$y_t = \widetilde{\varepsilon}_t + \widetilde{\theta}\widetilde{\varepsilon}_{t-1}.$$

Päteekö $\mathrm{var}(\widetilde{\varepsilon}_t) = \widetilde{\theta}^{-2}\sigma^2$? Päteekö $\widetilde{\varepsilon}_t = \widetilde{\theta}^{-1}\varepsilon_t$?

4. Olkoot $\{\varepsilon_{1t}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ja $\{\varepsilon_{2t}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ valkoista kohinaa siten, että $\mathsf{E}(\varepsilon_{it}) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_{it}^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_{it}\varepsilon_{it-j}) = 0$, kun $j \neq 0$ ja $i = 1, 2$. Oletetaan, että prosessit korreloivat keskenään siten, että $\mathsf{cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = [e^t/(1 + e^t)]\sigma^2$. (Kovarianssi noudattaa ns. *logististä* funktiota; e on Neperin luku). Onko prosessi $\{\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ heikosti stationaarinen?