STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 4 (5.10.)

1.

a) Noudattakoon satunnaismuuttuja Y_1 normaalijakaumaa $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Muodostetaan aikasarja $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ asettamalla arvottu arvo (y_1) y_t:ksi kaikille ajanjaksoille. Onko tällainen prosessi heikosti stationaarinen?

b) Laske autokorrelaatiofunktio (ρ_j:t) a)-kohdan tilanteessa ja kuvaile, miten autokorrelaatiofunktio käyttäytyy. Kuoleentuuko stationaarisen prosessin autokorrelaatiofunktio aina suurilla viipeillä?

2.

a) Onko MA(q)-prosessi

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

jossa $q < \infty$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$, aina heikosti stationaarinen? (Kaikki parametrit ovat äärellisen suuruisia.) Perustele.

b) Onko vastaava MA(∞)-prosessi aina heikosti stationaarinen? Perustele.

c) Olkoon prosessi y_t sellainen, että $\mathsf{E}(y_t) = 0$, $\mathsf{E}(y_t^2) = \sigma_y^2$ ja $\mathsf{E}(y_t y_{t-1}) = 0$. Onko prosessi välttämättä valkoista kohinaa? Perustele. (Vihje: Keksi vastaesimerkki.)

d) Voiko a)-kohdan MA(q)-prosessille päteä $|\rho_j| > |\rho_i|$, kun $j > i$ ($i, j = 1, 2, \ldots$)? (Vihje: Keksi esimerkki.)

3. Tutkitaan MA(∞)-prosessia

$$\begin{aligned} y_t &= \psi(L)\varepsilon_t \\ &= \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + +\psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots, \end{aligned}$$

jossa ε_t on valkoista kohinaa ($\mathsf{var}(\varepsilon_t)$= σ^2), $\psi_0 = 1$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Osoita, että tällöin myös $\gamma_j = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+j} < \infty$.

4. Olkoon ε_t valkoista kohinaa eli $\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ja $\mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, kun $j \neq 0$.

a) Oletaan prosessi

$$y_t = \beta t + \varepsilon_t,$$

jossa $\beta \neq 0$ on kiinteä parametri. Onko y_t heikosti stationaarinen prosessi?

b) Prosessi on kuten edellä. Onko $y_t - \beta t$ heikosti stationaarinen prosessi?

c) Oletetaan prosessi

$$y_t = \beta \sin(t) + \varepsilon_t,$$

jossa β on kiinteä parametri. Osoita, että y_t ei ole heikosti stationaarinen prosessi.

d) Oletetaan prosessi

$$y_t^{(i)} = \beta^{(i)} \sin(t) + \varepsilon_t,$$

jossa $\beta^{(i)}$ arvotaan kutakin i :nnettä reaalisaatiota $\{y_t^{(i)}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ varten, $\beta^{(i)}$ on normaalinen odotusarvolla 0 ja varianssilla σ^2 eli $\beta^{(i)} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_\beta^2)$ ja $\beta^{(i)}$ on riippumaton ε_t:istä. Osoita, että y_t ei ole heikosti stationaarinen prosessi.

e) Oletetaan prosessi

$$y_t^{(i)} = \beta_1^{(i)} \sin(t) + \beta_2^{(i)} \cos(t) + \varepsilon_t,$$

jossa $\beta_1^{(i)}$ ja $\beta_2^{(i)}$ arvotaan kutakin i :nnettä reaalisaatiota $\{y_t^{(i)}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ varten, $\beta_1^{(i)} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_\beta^2)$, $\beta_2^{(i)} \sim \mathsf{N}(0, \sigma_\beta^2)$ ja $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ ja ε_t:t ovat riippumattomia toisistaan. Osoita, että y_t on heikosti stationaarinen prosessi. (Muista: $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.) Voiko yhdestä äärettömän pitkästä aikasarjasta päätellä $\beta_1^{(i)}$- ja $\beta_2^{(i)}$-parametrien odotusarvon ja varianssin?

5. Noudattakoon $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ARMA(1,1)-prosessia

$$(1 - \phi L) y_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t, \tag{1}$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$, $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$ ja $\phi \neq -\theta$.

a) Tulkitse ehdot $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$ ja $\phi \neq -\theta$.

b) Osoita, että y_t:n autokorrelaatiot ρ_j noudattavat kaavoja

$$\rho_1 = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\phi\theta}$$

ja

$$\rho_j = \phi \rho_{j-1},$$

kun $j > 1$. (Vihje: Kerro kaava (1) y_{t-j}:llä ja hyödynnä stationaarisuusoletusta.)

c) Kuvaile, miten autokorrelaatiot käyttäytyvät, jos ϕ on hyvin lähellä yhtä. Miten kaavat liittyvät ARMA(p,q)-prosessin autokorrelaatiofunktion yleisiin ominaisuuksiin?

d) Piirrä kuvio 15 ensimmäisestä autokorrelaatiosta, kun *i)* $\phi = 0,8$ ja $\theta = -0.3$, *ii)* $\phi = -0,8$ ja $\theta = 0.3$ ja *iii)* $\phi = 0,3$ ja $\theta = -0.8$.