

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 3 (28.9.)

1. Olkoon \mathbf{A} $n \times n$ -matriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1. Tehtävässä 1.2 todettiin, että voidaan osoittaa, että tällöin $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{A}^T = \mathbf{0}_n$ (n -ulotteinen nollista koostuva matriisi). Todista tulos. (Vihje: HT 1.2.)

2. Oletetaan kolmannen asteen differenssiyhtälö

$$y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-2} - \phi y_{t-3} + w_t.$$

Osoita, että yhtälön impulssivastefunktio ei ole stabiili millään ϕ :n arvolla. (Vihje1: Älä yritä ratkaista kolmannen asteen polynomin juuria! Vihje2: Etsi juuri, joka on yksikköympyrällä tai sen ulkopuolella riippumatta ϕ :n arvosta.)

3. Aikasarja y_t noudattaa 2. asteen differenssiyhtälöä

$$(1 - L + 0.5L^2)y_t = w_t.$$

- Muodosta karakteristinen yhtälö ja laske sen juuret λ_1 ja λ_2 .
- Onko systeemi stabiili? Perustelee.
- Tarkista lauseen 2.2 mukaisen hajotelman $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$ pätevyys tehtävän mukaisilla λ_1 :n, λ_2 :n, ϕ_1 :n ja ϕ_2 :n arvoilla.

4. Jatketaan differenssiyhtälön

$$(1 - L + 0.5L^2)y_t = w_t$$

tarkastelua.

- Esitä karakteristisen yhtälön juuret napakoordinaattien R ja θ avulla.
- Laske IVF:n $(\partial y_{t+j} / \partial w_t = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j)$ c_1 - ja c_2 -kertoimien numeeriset arvot (" $\alpha \pm \beta i$ ") juurten avulla.
- Laske IVF $\partial y_{t+j} / \partial w_t = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j = 2R^j [\alpha \cos(\theta j) - \beta \sin(\theta j)]$ tehtävän tilanteessa. Selitä, miten IVF tehtävän tilanteessa käyttäytyy ja miksi.

5. Oletetaan, että y_t noudattaa 2. asteen differenssiyhtälöä

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t.$$

Sen impulssivastefunktio (IVF) on

$$\begin{aligned} \partial y_{t+j} / \partial w_t &= c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j \\ &= R^j \{c_1 [\cos(\theta j) + i \sin(\theta j)] + c_2 [\cos(\theta j) - i \sin(\theta j)]\} \\ &= 2R^j [\alpha \cos(\theta j) - \beta \sin(\theta j)] \end{aligned} \quad (1)$$

(s. 15–16 ja HT 1.1).

a) Osoita, että IVF voidaan esittää myös muodossa

$$\partial y_{t+j} / \partial w_t = R^j \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \cos(\theta j + \theta^*), \quad (2)$$

jossa a ja b liittyvät yhtälöihin $\lambda_1 = a + bi$ ja $\lambda_2 = a - bi$ ja θ^* liittyy c_i :den napakoordinaattimuotoihin. (Vihje: HT 1.1 ja $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$.)

b) Piirrä IVF:t kaavojen (1) ja (2) avulla j :n arvoille 1–20, kun $\phi_1 = 0,5$ ja $\phi_2 = -0,8$. (Vihje: HT 1.1.) Tarkista, että piirtämäsi kuviot täsmäävät kirjan kuvion 1.4 b) kanssa.

Voit käyttää mitä tahansa Simulle tuttua piirto-ohjelmaa. Jos käytät Survo-ohjelmistoa, niin seuraavat komentorivit ovat ehkä avuksi:

```
* PLOT Y(j)=(0.9^j)*(cos(1.29*j)+0.291*sin(1.29*j)) / j=0,20,1
* YSCALE=-1(0.2)1 XSCALE=0(5)20 TICK=1,0.1
* DEVICE=PS,C:\IVF1.PS MODE=PS
* >copy C:\IVF1.PS LPT1
```

c) Pätevätkö yllä olevat napakoordinaattimuotoon perustuvat kaavat IVF:lle, kun karakteristisen yhtälön juuret ovat reaalisia (ja eri suuria)? Selitä.