STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 2 (21.9.)

1. Sivulla 23 viitattu lemma 2 on seuraava: Mille tahansa erisuurille luvuille $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ (eivät välttämättä ominaisarvoja) pätee

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^r}{\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(\lambda_i-\lambda_j)} = \begin{cases} 0, & \text{jos } r=0,1,\ldots,p-2, \\ 1, & \text{jos } r=p-1. \end{cases}$$

a) Osoita lemman avulla, että sivun 23 yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \\ \lambda_1^{p-2} & \lambda_2^{p-2} & \cdots & \lambda_p^{p-2} \\ \lambda_1^{p-3} & \lambda_2^{p-3} & \cdots & \lambda_p^{p-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{1} & \lambda_2^{1} & \cdots & \lambda_p^{1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{11} \\ t^{21} \\ t^{31} \\ \vdots \\ t^{p-1,1} \\ t^{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yksikäsitteiset ratkaisut ovat

$$t^{i1} = \frac{1}{\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

b) Varmistu (kokeile) mielivaltaisilla luvuilla, että lemma pätee.[1]

2. Olkoot tehtävän 1.4 matriisin $\mathbf{F}$ ominaisarvot kaikki eri suuria. Tällöin lauseen 1.2 (kirjan s. 12) mukaan

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{k=1,k\neq i}^{p}(\lambda_i-\lambda k)}.$$

Yllä $c_i = t_{1i}t^{i1}$, jossa t_{1i} on matriisin $\mathbf{F}$ ominaisarvoista koostuvan matriisin $\mathbf{T}$ $(1,i)$-alkio ja t^{i1} on matriisin $\mathbf{T}$ käänteismatriisin $(i,1)$-alkio. Todista lause 1.2. (Vihje: Kirjan s. 22 ja HT 2.1.)

[1] Aseta tarvittaessa $0^0 = 1$.

3. Tutkitaan p. asteen differenssiyhtälöä

$$y_t = \zeta + \sum_{k=1}^{p} \phi_k y_{t-k} + w_t,$$

jossa ζ on vakio. Osoita, että $\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1$ on riittävä ehto IVF:n stabiiliudelle. (Vihje: Todistus ristiriidan kautta. Oleta, että karakteristisen yhtälön juuri $\lambda_z = R\exp(i\theta)$ sijaitsee kompleksitasoon piirretyllä yksikköympyrällä tai sen ulkopuolella eli $|R\exp(i\theta)| = |R||\exp(i\theta)| = R \geq 1$ (perustele viimeinen yhtäsuuruus). Sijoita juuri karakteristiseen yhtälöön ja osoita, että jos yhtäaikaisesti $\sum_{k=1}^{p} |\phi_k| < 1$, niin $R^p = |\sum_{k=1}^{p} \phi_k R^{p-k} \exp[i(p-k)\theta]| < R^{p-1}$, mikä on oletuksen mukaan mahdotonta.)

4.[2]

a) Onko 2. asteen differenssiyhtälön

$$y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-2} + w_t$$

IVF stabiili, jos $\phi = 0$?[3] Entä jos $\phi \in (-1, 0)$? Perustele.

b) Osoita, että 5. asteen differenssiyhtälön

$$y_t = y_{t-1} + \phi y_{t-2} - \frac{\phi}{2} y_{t-3} + \frac{\phi}{2} y_{t-4} - \phi y_{t-5} + w_t$$

IVF ei ole stabiili millään ϕ:n arvolla. (Vihje: Osoita vastaesimerkin avulla, että karakteristisen yhtälön jokin juuri ei toteuta stabiilisuusehtoa.)

c) Edellisten kohtien perusteella on ilmeistä, että p. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiilius ei määräydy y_{t-1}:n kertoimen suuruuden perusteella. Missä erityistilanteessa y_{t-1}:n kerroin määrää IVF:n stabiiliuden?

d) Osoita, että p. asteen differenssiyhtälön

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + w_t,$$

IVF ei ole stabiili, jos $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$.

e) Onko $\sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$ riittävä ehto p. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle? Perustele. (Vihje: Pohdi 2. asteen differenssiyhtälöä.)

f) Onko $\sum_{i=1}^{2} |\phi_i| < 1$ riittävä ehto 2. asteen differenssiyhtälön IVF:n stabiiliudelle? Perustele eritoten kirjan kuvion 1.5 (s. 17) avulla.

---

[2] Vihje: Minkään kohdan ratkaiseminen ei edellytä polynomiyhtälöiden juurten ratkaisukaavoja.

[3] IVF on stabiili, jos impulssivaste $\partial y_{t+j}/\partial w_t \to 0$, kun $j \to \infty$.