STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 1 (20.9.)

1. Tutkitaan 2. asteen differenssiyhtälöä

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t.$$

a) Osoita, että impulssivastefunktion (IVF) $\partial y_{t+j}/\partial w_t = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j$ kertoimet c_1 ja c_2 ovat liittolukuja, kun ominaisarvot λ_1 ja λ_2 ovat liittolukuja. Osoita edelleen, että tällöinkin $c_1 + c_2 = 1$, vaikka c_1 ja c_2 ovat kompleksilukuja.

b) Ilmaise c_1 ja c_2 funktioina ϕ_1:stä ja ϕ_2:sta.

c) Oletetaan seuraavaksi, että $\phi_1 = 0,5$ ja $\phi_2 = -0,8$. Laske IVF $\partial y_{t+j}/\partial w_t = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j$ näillä arvoilla. (Vihje: Sivun 16 mukaan $c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j = 2R^j[\alpha\cos(\theta j) - \beta\sin(\theta j)]$, jossa $R = 0,9$ ja $\theta = 1,29$.)

2. Olkoot $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Lambda}$ ja $\mathbf{T}$ $p \times p$ -matriiseja, ja koostukoot matriisit $\mathbf{\Lambda}$ ja $\mathbf{T}$ matriisin $\mathbf{F}$ ominaisarvoista - ja vektoreista. Perustele hajotelma [1.2.17]

$$\mathbf{F} = \mathbf{T\Lambda T}^{-1}.$$

(Vihje: Kirjan sivu 730.)

3. Olkoon $\mathbf{A}$ $n \times n$ -matriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin 1. Voidaan osoittaa, että tällöin $\lim_{T\to\infty} \mathbf{A}^T = \mathbf{0}_n$ (n-ulotteinen nollista koostuva matriisi). Merkitään

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^T.$$

(Yllä $\mathbf{I}_n$ on $n \times n$ -identiteettimatriisi.) Todista, että

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{S}_T = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}.$$

(Vihje: Kirjan s. 732.)

4. Olkoon $p \times p$ -matriisi $\mathbf{F}$ kirjan yhtälössä [1.2.5] määritelty

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 1.1 (kirjan s. 10) mukaan matriisin $\mathbf{F}$ ominaisarvot ovat yhtälön

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-1} - \cdots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0$$

juuret. Todista lause 1.1. (Vihje: Kirjan s. 21.)