

Varianssianalyysi ja ei-parametriset menetelmät

Jyrki Möttönen

Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Sosiaalitutkimuksen tilastolliset menetelmät, kevät 2015

Johdanto

- Verrataan yhden tai useamman ryhmittelymuuttujan vaikutusta jatkuvan muuttujan vaihteluun.
- Kahden riippumattoman otoksen t-testissä perusjoukko on jaettu kahteen ryhmään.
- Yksisuuntainen varianssianalyysi on kahden riippumattoman otoksen t-testin yleistys tilanteeseen, jossa perusjoukko on jaettu useampaan kuin kahteen ryhmään.
- Kaksisuuntaisessa varianssianalyysissä perusjoukko on jaettu ryhmiin kahden ryhmittelymuuttujan perusteella.
- Tutkitaan sekä havaintojen vaihtelua ryhmien sisällä että ryhmäkeskiarvojen vaihtelua koko populaatiossa.
- Ennen varianssianalyysin suorittamista olisi tutkittava varianssien yhtäsuuruutta eri ryhmissä sekä normaalijakaumaoletuksen voimassaoloa.

Esimerkkiaineisto 1/4

Luento-esimerkeissä käytetään Suomen ESS2010-aineistoa (European Social Survey). Halutaan tutkia mm. seuraavia kysymyksiä:

- Onko luottamus instituutioihin keskimäärin yhtä suuri miehillä ja naisilla?
- Onko luottamus instituutioihin keskimäärin yhtä suuri uskonnollisuuden mukaan jaettujen ryhmien välillä? Jos luottamuksissa on eroa, niin minkä ryhmien välillä?
- Onko luottamus instituutioihin keskimäärin yhtä suuri eri koulutusasteen ihmisillä? Jos luottamuksissa on eroa, niin minkä ryhmien välillä?
- Onko koulutusasteella ja uskonnollisuudella yhdysvaikutusta luottamukseen instituutioihin, ts. onko koulutusasteryhmien keskiarvoissa tapahtuva muutos erilaista eri uskonnollisuusryhmissä?

Esimerkkiaineisto 2/4

Käytettävät muuttujat:

- *luottamus*: Muuttujien *trstprl*, *trstlgl*, *trstplc*, *trstplt*, *trstprt*, *trstep*, *trstun* painotettu summa, jossa painot on valittu siten, että *luottamus* selittäisi mahdollisimman suuren osuuden muuttujien *trstprl*, ..., *trstun* vaihtelusta (pääkomponentti-analyysin ensimmäisen pääkomponentin pistemäärä). Kaikki painot ovat positiivisia, joten pieni muuttujan *luottamus* arvo viittaa vähäiseen luottamukseen ja suuri muuttujan arvo suureen luottamukseen instituutioita kohtaan.

Esimerkkiaineisto 3/4

Käytettävät muuttujat:

- *sukupuoli*: Muuttuja *gndr* (Gender). 1=Mies, 2=Nainen.
- *uskonnollisuus*: Muuttujasta *rlgdgr* (How religious are you) tehty viisiluokkainen järjestysasteikon muuttuja.
(0 – 1 → 1, 2 – 3 → 2, 4 – 6 → 3, 7 – 8 → 4, 9 – 10 → 5).
Pieni arvo viittaa vähäiseen uskonnollisuuteen ja suuri arvo voimakkaaseen uskonnollisuuteen.
- *vasenoikea*: Muuttujasta *lrscale* (Placement on left right scale) tehty kolmiluokkainen järjestysasteikon muuttuja.
(0 – 3 → 1, 4 – 6 → 2, 7 – 10 → 3). Pieni arvo viittaa vasemmistolaisuuteen ja suuri arvo oikeistolaisuuteen.

Esimerkkiaineisto 4/4

Käytettävät muuttujat:

- *koulutusaste*: Muuttujasta *edlvdfi* (Highest level of education, Finland) tehty viisiluokkainen järjestysasteikon muuttuja. (1 – 3 → 1, 4 – 6 → 2, 7 – 8 → 3, 9 – 11 → 4, 12 – 14 → 5). Pieni arvo viittaa alhaiseen koulutustasoon ja suuri arvo korkeaan koulutustasoon. 1="Perusaste", 2="Keskiaste", 3="Alin korkea-aste", 4="Alempi korkeakouluaste", 5="Ylempi korkeakouluaste+tutkijakouluaste".

Kahden riippumattoman otoksen t-testi

- Kahden riippumattoman otoksen t-testissä perusjoukko on jaettu kahteen ryhmään.
- Tutkitaan onko jatkuvan muuttujan arvot keskimäärin yhtäsuuria vertailtavien ryhmien välillä.

Mallioletukset 1/2

Malli 1: Ryhmien hajonnat voivat olla erisuuret

- Ensimmäisen ryhmän havainnot tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, ts. normaalijakaumasta, jonka odotusarvo on μ ja hajonta σ_1 .
- Toisen ryhmän havainnot tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ eli ryhmän odotusarvo voi poiketa ensimmäisen ryhmän odotusarvosta ja keskihajonta voi erota ensimmäisen ryhmän keskihajonnasta.

Malli 2: Ryhmien hajonnat ovat yhtäsuuret

- Ensimmäisen ryhmän havainnot tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma^2)$.
- Toisen ryhmän havainnot tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma^2)$ eli ryhmän odotusarvo voi poiketa ensimmäisen ryhmän odotusarvosta ja keskihajonta on sama kuin ensimmäisessä ryhmässä

Mallioletukset 2/2

- Varianssien yhtäsuuruuden testauksen avulla voidaan päättää kumpaa mallia käytetään (mallia 1 tai 2). Testaukseen voidaan käyttää esimerkiksi Levenen testiä.
- Normaalijakaumaoletuksen tutkimiseen voidaan käyttää esimerkiksi todennäköisyyspaperikuvaa (Q-Q Plot). Mitä paremmin pisteet asettuvat suoralle, sitä lähempänä jakauma on normaalijakaumaa.

Testattava hypoteesi ja testisuure 1/3

Halutaan testata hypoteesia

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

eli hypoteesia

H_0 : Ryhmien odotusarvot ovat yhtäsuuret

- Jos ryhmien varianssit ovat yhtäsuuret (malli 2), niin hypoteesin H_0 testaukseen käytetään *t-testisuuretta* ja p-arvon laskemiseen *t-jakaumaa*.
- Jos ryhmien varianssit ovat erisuuret (malli 1), niin hypoteesin H_0 testaukseen käytetään *t-testisuuretta* (hiukan erilainen kaava kuin mallin 2 tapauksessa) ja *likimääräisen* p-arvon laskemiseen t-jakaumaa.

Testattava hypoteesi ja testisuure 2/3

Kahden riippumattomien otoksen t-testisuure (malli 1):

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

jossa \bar{X}_1 ja \bar{X}_2 ovat otosten keskiarvot, s on havaintoaineiston keskihajonnan estimaatti ja n_1 ja n_2 ovat otosten koot.

Nollahypoteesin vallitessa t-testisuure noudattaa t-jakaumaa vapausastein $n_1 + n_2 - 2$.

Testisuureesta nähdään suoraan, että keskiarvojen ollessa lähellä toisiaan testisuureen arvo on lähellä nollaa. Jos taas keskiarvot ovat kaukana toisistaan, niin testisuureen arvo on itseisarvoltaan suuri. Näin ollen itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot puoltavat vastahypoteesia $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Testattava hypoteesi ja testisuure 3/3

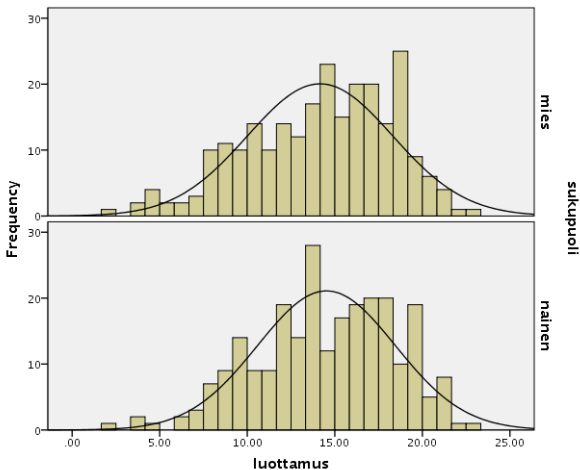
Kahden riippumattomien otoksen t-testisuure (malli 2):

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

jossa \bar{X}_1 ja \bar{X}_2 ovat otosten keskiarvot, s_1^2 ja s_2^2 ovat otosvarianssit (keskihajonnat s_1 ja s_2) ja n_1 ja n_2 ovat otosten koot. Testisuure noudattaa likimain t-jakaumaa. Itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot puoltavat tässäkin tapauksessa vastahypoteesia $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

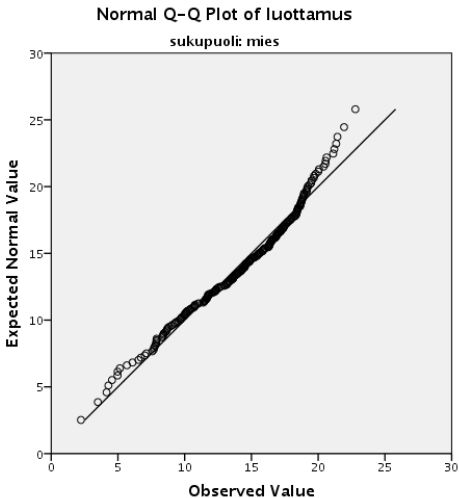
Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Muuttujan *luottamus* jakauma miesten ja naisten joukossa



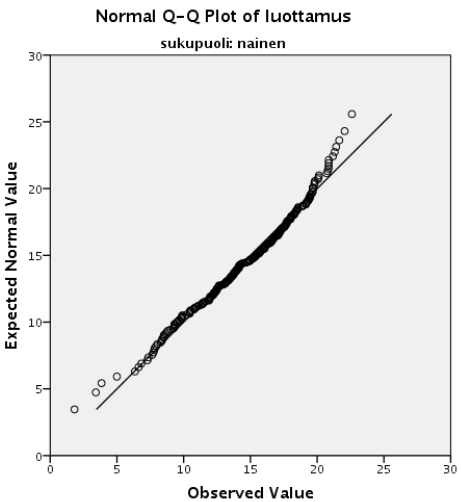
Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Todennäköisyyspaperikuva luottamus-muuttujalle miesten joukossa



Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Todennäköisyyspaperikuva luottamus-muuttujalle naisten joukossa



Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Yksinkertaisia tunnuslukuja luottamus-muuttujalle sukupuolittain

Group Statistics

| sukupuoli | | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-----------|--------|-----|---------|-------------------|--------------------|
| luottamus | mies | 250 | 14.1587 | 4.14568 | .26220 |
| | nainen | 250 | 14.5218 | 3.93940 | .24915 |

Kahden riippumattoman otoksen t-testi

Independent Samples Test

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | |
|-----------|-----------------------------|---|------|------------------------------|---------|-----------------|-----------------|
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference |
| luottamus | Equal variances assumed | .708 | .400 | -1.004 | 498 | .316 | -.36307 |
| | Equal variances not assumed | | | -1.004 | 496.708 | .316 | -.36307 |

Independent Samples Test

| | | t-test for Equality of Means | | |
|-----------|-----------------------------|------------------------------|---|--------|
| | | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | Lower | Upper |
| luottamus | Equal variances assumed | .36169 | -1.07370 | .34756 |
| | Equal variances not assumed | .36169 | -1.07371 | .34757 |

Mannin-Whitneyn testi

Kahden riippumattoman otoksen t-testi olettaa havaintojen tulevan normaalijakaumasta. Jos huomataan, että havainnot eivät tulekaan normaalijakaumasta, niin ryhmien välisiä eroja voi tutkia ei-parametrisella Mannin-Whitneyn testillä. Ei-parametrisuus tarkoittaa tässä sitä, että havaintojen jakaumasta tehdään hyvin vähän oletuksia. Ainoastaan oletetaan, että havainnot tulevat jatkuvista samanmuotoisista jakaumista. Mannin-Whitneyn testisuure perustuu havainnoista laskettuihin järjestyslukuihin.

Mallioletukset

Oletukset:

- Ensimmäisen ryhmän havainnot tulevat jatkuvasta jakaumasta, jonka mediaani on τ_1 .
- Toisen ryhmän havainnot tulevat jatkuvasta jakaumasta, jonka mediaani on τ_2 .
- Havainnot tulevat *samanmuotoisista* jatkuvista jakaumista (voi olla myös vino jakauma).

Huom. Toinen oletus tarkoittaa sitä, että jakaumien tiheysfunktiot ovat täsmälleen samanmuotoisia mutta jakaumien sijainti voi vaihdella.

Testattava hypoteesi ja testisuure

Halutaan testata hypoteesia

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2$$

eli hypoteesia

$$H_0 : \text{Ryhmi\u00e4n mediaanit ovat yht\u00e4suuret}$$

Nollahypoteesin H_0 testaukseen voidaan k\u00e4ytt\u00e4\u00e4 Mannin-Whitneyn testisuuretta ja p-arvon laskemiseen voi k\u00e4ytt\u00e4\u00e4 tarkkaa jakaumaa tai normaaliapproksimaatiota.

Mannin-Whitneyn testi

Hypothesis Test Summary

| | Null Hypothesis | Test | Sig. | Decision |
|---|---|---|------|-----------------------------|
| 1 | The distribution of luottamus is the same across categories of sukupuoli. | Independent-Samples Mann-Whitney U Test | .441 | Retain the null hypothesis. |

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

Yksisuuntainen varianssianalyysi

- Yksisuuntaisessa varianssianalyysissä perusjoukko on jaettu k :hon ryhmään.
- Tutkitaan onko jatkuvan muuttujan arvot keskimäärin yhtäsuuria vertailtavien ryhmien välillä.

Mallioletukset 1/3

Vaihtoehto 1: Ryhmien hajonnat voivat olla erisuuret

- Ensimmäisen ryhmän havainnot (n_1 kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- Toisen ryhmän havainnot (n_2 kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- ...
- k :nnen ryhmän havainnot (n_k kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_k, \sigma_k^2)$.

Mallioletukset 2/3

Vaihtoehto 2: Ryhmien hajonnat ovat yhtäsuuret

- Ensimmäisen ryhmän havainnot (n_1 kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_1, \sigma^2)$.
- Toisen ryhmän havainnot (n_2 kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_2, \sigma^2)$.
- ...
- k :nnen ryhmän havainnot (n_k kpl) tulevat normaalijakaumasta $N(\mu_k, \sigma^2)$.

Mallioletukset 3/3

- Varianssien yhtäsuuruuden testauksen avulla voidaan päättää kumpaa mallia käytetään (vaihtoehtoa 1 tai 2). Testaukseen voidaan käyttää Levenen testiä.
- Normaalijakaumaoletuksen tutkimiseen voidaan käyttää todennäköisyyspaperikuvaa (Q-Q Plot).

Testattava hypoteesi ja testisuure

Halutaan testata hypoteesia

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

eli hypoteesia

H_0 : Ryhmien odotusarvot eli populaatiokeskiarvot ovat yhtäsuuret

- Jos ryhmien varianssit ovat yhtäsuuret (malli 2), niin hypoteesin H_0 testaukseen käytetään *F-testisuuretta* ja p-arvon laskemiseen *F-jakaumaa*.
- Jos ryhmien varianssit ovat erisuuret (malli 1), niin hypoteesin H_0 testaukseen voi käyttää esimerkiksi *Welchin testisuuretta* ja *likimääräisen* p-arvon laskemiseen F-jakaumaa.

Pareittaiset vertailut (post hoc testit)

- Jos yksisuuntaisessa varianssianalyysissä H_0 hylätään, niin ainakin kahden ryhmän odotusarvot ovat erisuuria.
- Varianssianalyysi ei anna vastausta siihen mitkä odotusarvot eroavat toisistaan! Siihen kysymykseen voidaan etsiä vastausta parittaisten vertailujen testien avulla.

Pareittaiset vertailut (post hoc testit)

Parittaisin vertailuihin on kehitetty lukuisa joukko erilaisia testejä. Field (2009) ehdottaa seuraavia yleisiä ohjeita testin valintaan.

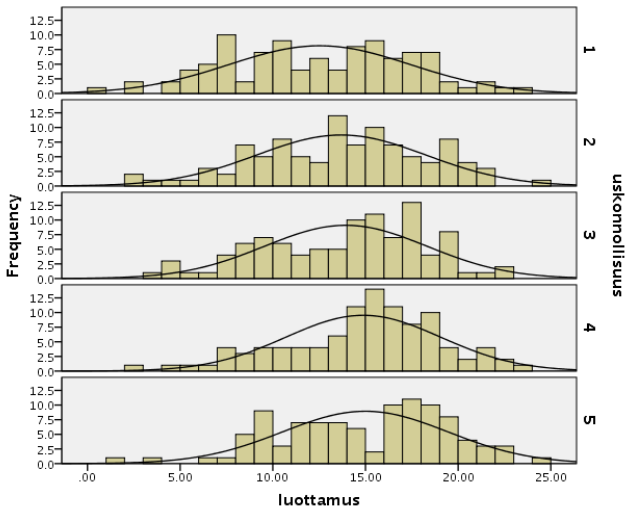
a) Populaatiohajonnat yhtäsuuria

- Otoskoot n_i yhtäsuuria \Rightarrow REGWQ tai Tukey.
- Otoskoot n_i eroavat vain hiukan \Rightarrow Gabriel.
- Otoskoot n_i eroavat paljon \Rightarrow Hochberg's GT2.

b) Populaatiohajonnat erisuuria \Rightarrow Games-Howell

Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Muuttujan *luottamus* jakauma uskonnollisuusryhmittäin



Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Yksinkertaisia tunnuslukuja luottamus-muuttujalle uskonnollisuusryhmittäin

Descriptives

luottamus

| | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error | 95% Confidence Interval for Mean | | Minimum | Maximum |
|-------|-----|---------|----------------|------------|----------------------------------|-------------|---------|---------|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound | | |
| 1.00 | 100 | 12.5251 | 4.89467 | .48947 | 11.5539 | 13.4963 | .50 | 23.05 |
| 2.00 | 100 | 13.6921 | 4.57804 | .45780 | 12.7837 | 14.6005 | 2.50 | 24.45 |
| 3.00 | 100 | 13.9333 | 4.38555 | .43856 | 13.0631 | 14.8035 | 3.28 | 22.69 |
| 4.00 | 100 | 14.8803 | 4.18595 | .41859 | 14.0497 | 15.7109 | 2.77 | 23.49 |
| 5.00 | 100 | 14.9863 | 4.46116 | .44612 | 14.1011 | 15.8715 | 1.82 | 24.30 |
| Total | 500 | 14.0034 | 4.57798 | .20473 | 13.6012 | 14.4057 | .50 | 24.45 |

Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Varianssien yhtäsuuruuden testaus uskonnollisuusryhmien välillä

Test of Homogeneity of Variances

luottamus

| Levene Statistic | df1 | df2 | Sig. |
|------------------|-----|-----|------|
| 1.533 | 4 | 495 | .191 |

Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Yksisuuntainen varianssianalyysi *luottamus*-muuttujalle.
Ryhmittelijänä *uskonnollisuus*. Ryhmittäiset populaatiovariانسsit oletettu yhtäsuuriksi.

ANOVA

luottamus

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------|----------------|-----|-------------|-------|------|
| Between Groups | 402.216 | 4 | 100.554 | 4.950 | .001 |
| Within Groups | 10055.774 | 495 | 20.315 | | |
| Total | 10457.990 | 499 | | | |

Normaalisuusoletukseen perustuva testi

Yksisuuntainen varianssianalyysi *luottamus*-muuttujalle.
 Ryhmittelijänä *uskonnollisuus*. Ryhmittäiset populaatiovariانسsit voivat erota.

Robust Tests of Equality of Means

luottamus

| | Statistic ^a | df1 | df2 | Sig. |
|-------|------------------------|-----|---------|------|
| Welch | 4.638 | 4 | 247.341 | .001 |

a. Asymptotically F distributed.

Pareittaiset vertailut

Multiple Comparisons

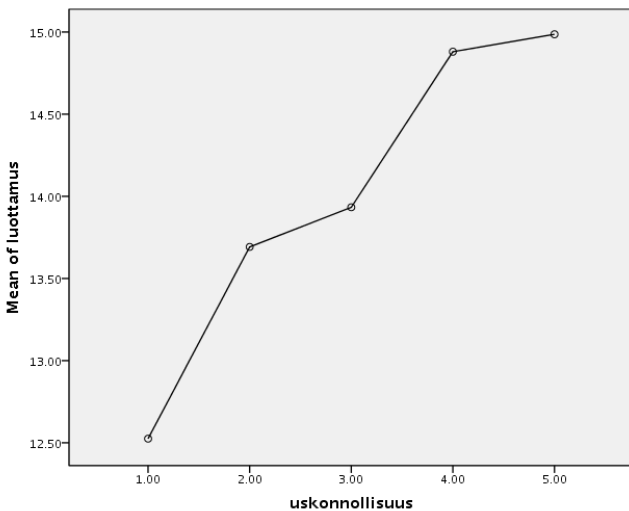
Dependent Variable: luottamus

Tukey HSD

| | | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|------------|-------|-------------------------|-------------|
| (I) uskonnollisuus | (J) uskonnollisuus | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 1.00 | 2.00 | -1.16695 | .63741 | .357 | -2.9121 | .5782 |
| | 3.00 | -1.40816 | .63741 | .178 | -3.1533 | .3370 |
| | 4.00 | -2.35515* | .63741 | .002 | -4.1003 | -.6100 |
| | 5.00 | -2.46118* | .63741 | .001 | -4.2063 | -.7160 |
| 2.00 | 1.00 | 1.16695 | .63741 | .357 | -.5782 | 2.9121 |
| | 3.00 | -.24122 | .63741 | .996 | -1.9864 | 1.5039 |
| | 4.00 | -1.18821 | .63741 | .338 | -2.9333 | .5569 |
| | 5.00 | -1.29424 | .63741 | .253 | -3.0394 | .4509 |
| 3.00 | 1.00 | 1.40816 | .63741 | .178 | -.3370 | 3.1533 |
| | 2.00 | .24122 | .63741 | .996 | -1.5039 | 1.9864 |
| | 4.00 | -.94699 | .63741 | .572 | -2.6921 | .7982 |
| | 5.00 | -1.05302 | .63741 | .465 | -2.7982 | .6921 |
| 4.00 | 1.00 | 2.35515* | .63741 | .002 | .6100 | 4.1003 |
| | 2.00 | 1.18821 | .63741 | .338 | -.5569 | 2.9333 |
| | 3.00 | .94699 | .63741 | .572 | -.7982 | 2.6921 |
| | 5.00 | -.10603 | .63741 | 1.000 | -1.8512 | 1.6391 |
| 5.00 | 1.00 | 2.46118* | .63741 | .001 | .7160 | 4.2063 |
| | 2.00 | 1.29424 | .63741 | .253 | -.4509 | 3.0394 |
| | 3.00 | 1.05302 | .63741 | .465 | -.6921 | 2.7982 |
| | 4.00 | -.10603 | .63741 | 1.000 | -1.6391 | 1.8512 |

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Luottamus-muuttujan keskiarvot uskonnollisuusryhmissä



Kruskalin-Wallis test

Edellä käsitelty klassinen yksisuuntainen varianssianalyysi olettaa havaintojen tulevan normaalijakaumasta. Jos huomataan, että havainnot eivät tulekaan normaalijakaumasta, niin ryhmien välisiä eroja voi tutkia ei-parametrisella Kruskalin-Wallis testillä. Ei-parametrisuus tarkoittaa tässä sitä, että havaintojen jakaumasta tehdään hyvin vähän oletuksia. Ainoastaan oletetaan, että havainnot tulevat jatkuvista samanmuotoisista jakaumista. Kruskalin-Wallis testisuure perustuu havainnoista laskettuihin järjestyslukuihin.

Mallioletukset

Oletukset:

- Ryhmän i havainnot (n_i kpl) tulevat jatkuvasta jakaumasta, jonka mediaani on τ_i , $i=1,2,\dots,k$.
- Havainnot tulevat *samanmuotoisista* jatkuvista jakaumista (voi olla myös vino jakauma).

Huom. Toinen oletus tarkoittaa sitä, että jakauman tiheysfunktio on täsmälleen samanmuotoinen mutta jakauman sijainti voi vaihdella. Esimerkiksi normaalijakaumien $N(0, 1)$, $N(2, 1)$, $N(4, 1)$ tiheysfunktiot ovat täsmälleen samanmuotoisia (koska hajonnat ovat samoja), ainoastaan sijainnit eroavat toisistaan.

Testattava hypoteesi ja testisuure

Halutaan testata hypoteesia

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k$$

eli hypoteesia

H_0 : Ryhmien mediaanit ovat yhtäsuuret

Nollahypoteesin H_0 testaukseen voidaan käyttää Kruskalin-Wallis testisuuretta ja likimääräisen p-arvon laskemiseen χ^2 -jakaumaa.

Kruskalin-Wallis testisuuren yhteys varianssianalyysin F -testisuureeseen

Jos käytetään tavallisen F -testisuuren laskemiseen alkuperäisten havaintojen sijasta niiden järjestyslukuja, niin huomataan, että saatu testisuure on yhtäpitävä Kruskal-Wallis testisuuren kanssa. Laskettaessa (esim. SPSS:n avulla) järjestyslukuaineistolle yksisuuntaisen varianssianalyysin p -arvo, niin Kruskal-Wallis testin pitäisi antaa suurinpiirtein sama p -arvo.

Kruskalin-Wallis testin käyttörajoitus

Kruskalin-Wallis testillä on hyvin lievät jakaumaoletukset. Havaintojen oletetaan ainoastaan tulevan joistain (tuntemattomista) jatkuvista samanmuotoisista jakaumista. Testi ei kuitenkaan sovellu aineistoihin, joissa ryhmittäiset varianssit eroavat selvästi toisistaan. Tällöin jakaumaoletus "kaikki havainnot tulevat *samanmuotoisesta* jatkuvasta jakaumasta" ei täyty.

Kruskalin-Wallis testin tulos *luottamus*-muuttujalle. Ryhmittelijänä *uskonnollisuus*.

Hypothesis Test Summary

| | Null Hypothesis | Test | Sig. | Decision |
|----------|---|---|------|-----------------------------|
| 1 | The distribution of <i>luottamus</i> is the same across categories of <i>uskonnollisuus</i> . | Independent-Samples Kruskal-Wallis Test | .001 | Reject the null hypothesis. |

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

Kaksisuuntainen varianssianalyysi

- Kaksisuuntaisessa varianssianalysissä perusjoukko on jaettu ryhmiin kahden ryhmittelymuuttujan perusteella.
- Tarkoituksena on tutkia onko kahden ryhmittelymuuttujan välillä yhdysvaikutusta jatkuvan muuttujan arvoihin, ts. onko ensimmäisen ryhmittelymuuttujan keskiarvoissa tapahtuva muutos erilaista toisen ryhmittelymuuttujan eri ryhmissä.
- Jos ryhmittelymuuttujien välillä ei ole yhdysvaikutusta, niin sen jälkeen voidaan tutkia ryhmittelymuuttujien omavaikutuksia jatkuvan muuttujien arvoihin.

Tilastollinen malli

Olkoon A ensimmäinen ryhmittelymuuttuja, jolla on a ryhmää ja B toinen ryhmittelymuuttuja, jolla on b ryhmää. Jatkuvan muuttujan y arvot voidaan luokitella nyt $a \cdot b$ soluun seuraavasti:

| | | B | | | |
|----------|---------------------------|--------------------------|----------|--------------------------|--|
| A | 1 | 2 | ... | b | |
| 1 | $y_{111}, y_{112} \dots$ | $y_{121}, y_{122} \dots$ | ... | $y_{1b1}, y_{1b1} \dots$ | |
| 2 | $y_{211}, y_{212} \dots$ | $y_{221}, y_{222} \dots$ | ... | $y_{2b1}, y_{2b2} \dots$ | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | |
| a | y_{a11}, y_{a12}, \dots | $y_{a21}, y_{a22} \dots$ | ... | $y_{ab1}, y_{ab2} \dots$ | |

Esim. y =*luottamus*, A =*uskonnollisuus*, $a = 5$, B =*koulutusaste*, $b = 5$, solujen lukumäärä on $a \cdot b = 25$.

Tilastollinen malli

Mallioletukset:

- Solun ($A = i, B = j$) havainnot tulevat normaalijakaumasta, jonka odotusarvo μ_{ij} ja varianssi σ^2 , $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, b$.
- Kaikki havainnot ovat riippumattomia.

Huom! Yksittäisen solun havainnot tulevat samasta jakaumasta mutta eri soluissa voi olla eri odotusarvot.

Tilastollinen malli

Yksittäisen solun havaintojen odotusarvo voidaan nyt jakaa osiin seuraavasti:

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b,$$

jossa α_i on luokittelumuuttujan A i :n tason vaikutus, β_j on luokittelumuuttujan B j :n tason vaikutus ja $(\alpha\beta)_{ij}$ on luokittelumuuttujien A ja B yhdysvaikutus.

Jos yhdysvaikutusta ei ole (eli $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ kaikilla i, j), niin $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$. Tällöin odotusarvojen erot muuttujan B ryhmien välillä ovat samoja luokittelumuuttujan A ryhmissä. Luonnollisesti myös odotusarvojen erot muuttujan A ryhmien välillä ovat samoja luokittelumuuttujan B ryhmissä. Esimerkiksi, $\mu_{i2} - \mu_{i1} = \beta_2 - \beta_1$ ja $\mu_{i3} - \mu_{i1} = \beta_3 - \beta_1$ kaikilla $i = 1, \dots, a$.

Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 1/6

Esim. Oletetaan, että meillä on jatkuvana muuttujana *luottamus* ja seuraavanlaiset luokittelumuuttujat

$A = \text{sukupuoli}$ ($A=1=\text{"Mies"}, A=2=\text{"Nainen"}$) ja

$B = \text{työssäkäynti}$ ($B=1=\text{"Työtön"}, B=2=\text{"Työssäkäyvä"}$)

Oletetaan lisäksi, että $\alpha_1 = \beta_1 = (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = (\alpha\beta)_{21} = 0$.

Tällöin solujen havaintojen odotusarvot ovat seuraavat:

| Sukupuoli | Työssäkäynti | |
|-----------|------------------|---|
| | Työtön | Työssäkäyvä |
| Mies | μ | $\mu + \beta_2$ |
| Nainen | $\mu + \alpha_2$ | $\mu + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{22}$ |

Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 2/6

Edellisiä odotusarvoja voidaan estimoida havaintoaineistosta laskettujen keskiarvojen avulla. Oletetaan, että on saatu seuraavanlaiset keskiarvot:

| Sukupuoli | Työssäkäynti | |
|-----------|--------------------------------|--|
| | Työtön | Työssäkäyvä |
| Mies | $\bar{x}_{11}=13.3$ | $\bar{x}_{12}=14.1(=13.3+0.8)$ |
| Nainen | $\bar{x}_{21}=13.7(=13.3+0.4)$ | $\bar{x}_{22}=14.55(=13.3+0.4+0.8+0.05)$ |

Kun verrataan työttömien ja työssäkäyvien luottamuksen eroa, niin naisilla luottamus kasvaa 0.05 verran enemmän kuin miehillä.

Varianssianalyysin avulla voidaan testata onko tämä sukupuolten välinen ero merkitsevä eli testataan onko $(\alpha\beta)_{22} = 0$. Jos testin tulos viittaisi siihen, että $(\alpha\beta)_{22} \neq 0$, niin työssäkäymisellä ja sukupuolella olisi yhdysvaikutusta.

Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 3/6

Jos muuttujilla *sukupuoli* ja *työssäkäynti* on **yhdysvaikutusta** (eli $(\alpha\beta)_{22} \neq 0$), niin

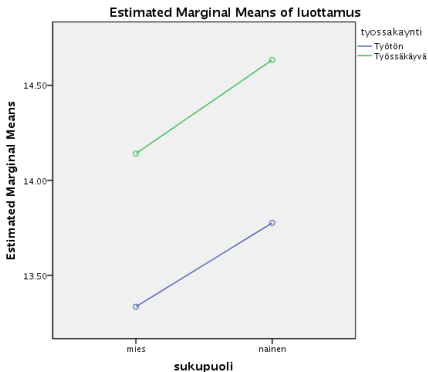
- ryhmien "Työtön" ja "Työssäkäyvä" odotusarvojen ero on erisuuri miesten ja naisten joukossa.
- ryhmien "Mies" ja "Nainen" odotusarvojen ero on erisuuri työttömien ja työssäkäyvien joukossa.

Jos muuttujilla *sukupuoli* ja *työssäkäynti* **ei ole yhdysvaikutusta** (eli $(\alpha\beta)_{22} = 0$), niin

- ryhmien "Työtön" ja "Työssäkäyvä" odotusarvojen ero on sama miesten ja naisten joukossa.
- ryhmien "Mies" ja "Nainen" odotusarvojen ero on sama työttömien ja työssäkäyvien joukossa.

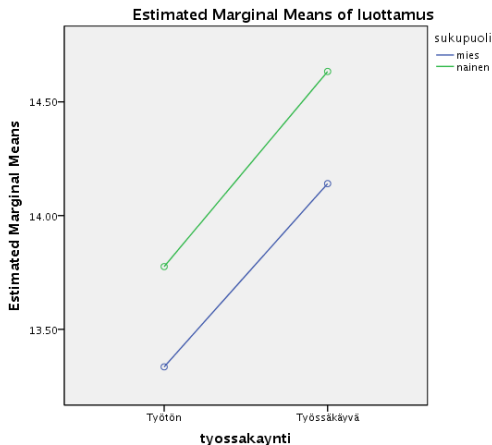
Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 4/6

Keskiarvot miesten ja naisten ryhmissä työssäkäynnin mukaan jaoteltuna. Suorat ovat lähes samansuuntaisia, joten (ainakaan mitään suurta) yhdysvaikutusta ei ole sukupuolen ja työssäkäynnin välillä.



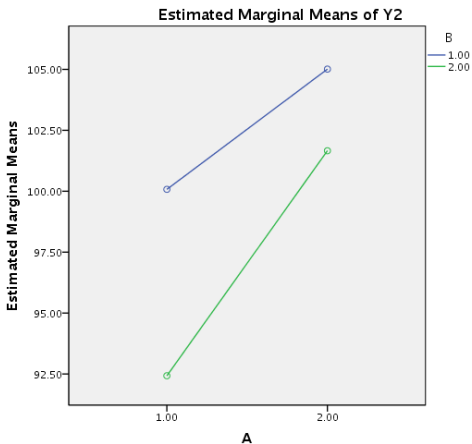
Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 5/6

Keskiarvot työttömien ja työssäkäyvien ryhmissä sukupuolen mukaan jaoteltuna.



Esimerkki: Luokittelumuuttujat ovat kaksiluokkaisia 6/6

Tässä on vielä esimerkki keskiarvokuviosta, kun muuttujien välillä on selkeä yhdysvaikutus. Suorat ovat selkeästi erisuuntaisia.



Yhdysvaikutuksen testaus

Ensimmäiseksi testataan aina yhdysvaikutuksen olemassaolo.
Nollahypoteesina on nyt

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b.$$

eli

H_0 : Muuttujilla A ja B ei ole yhdysvaikutusta.

Nollahypoteesin testaukseen käytetään F -testisuuretta, joka noudattaa F -jakaumaa nollahypoteesin vallitessa.

Itsenäisten vaikutusten eli päävaikutusten testaus 1/2

Jos yhdysvaikutuksen testauksen perusteella muuttujilla ei todeta tilastollisesti merkitsevää yhdysvaikutusta, niin sen jälkeen voidaan tutkia luokittelumuuttujan A itsenäistä vaikutusta.

Luokittelumuuttujan A itsenäisen vaikutuksen testaus, kun yhdysvaikutusta ei ole. Nollahypoteesina on

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0.$$

eli

H_0 : Muuttujalla A ei ole itsenäistä vaikutusta

Nollahypoteesin testaukseen käytetään jälleen F -testisuuretta, joka noudattaa F -jakaumaa nollahypoteesin vallitessa.

Huom: H_0 on yksisuuntaisen varianssianalyysin nollahypoteesi.

Itsenäisten vaikutusten eli päävaikutusten testaus 2/2

Jos yhdysvaikutuksen testauksen perusteella muuttujilla ei todeta tilastollisesti merkitsevää yhdysvaikutusta, niin sen jälkeen voidaan tutkia luokittelumuuttujan B itsenäistä vaikutusta.

Luokittelumuuttujan B itsenäisen vaikutuksen testaus, kun yhdysvaikutusta ei ole. Nollahypoteesina on

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_b = 0.$$

eli

H_0 : Muuttujalla B ei ole itsenäistä vaikutusta

Nollahypoteesin testaukseen käytetään jälleen F-testisuuretta, joka noudattaa F -jakaumaa nollahypoteesin vallitessa.

Huom: H_0 on yksisuuntaisen varianssianalyysin nollahypoteesi.

Testauksesta

- Tekijöiden A ja B itsenäisiä vaikutuksia eli päävaikutuksia ei voida tarkastella erillisinä, jos tekijöillä on yhdysvaikutusta.
- Jos jokaisessa solussa on yhtä paljon havaintoja, niin kyseessä on **tasapainotettu** koeasetelma.
- Kaksisuuntaisella varianssianalyysillä ei ole ei-parametrista vastinetta.

Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Luokittelumuuttujina *uskonnollisuus* ja *koulutusaste*.

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: luottamus

| Source | Type III Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------------------------|-------------------------|------|-------------|-----------|------|
| Corrected Model | 1996.600 ^a | 24 | 83.192 | 4.916 | .000 |
| Intercept | 228671.430 | 1 | 228671.430 | 13513.667 | .000 |
| uskonnollisuus | 1006.419 | 4 | 251.605 | 14.869 | .000 |
| koulutusaste | 543.325 | 4 | 135.831 | 8.027 | .000 |
| uskonnollisuus * koulutusaste | 207.309 | 16 | 12.957 | .766 | .726 |
| Error | 28428.109 | 1680 | 16.921 | | |
| Total | 377553.190 | 1705 | | | |
| Corrected Total | 30424.709 | 1704 | | | |

a. R Squared = .066 (Adjusted R Squared = .052)

Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Parittaiset testit, kun luokittelumuuttujana on *uskonnollisuus*.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: luottamus

Tukey HSD

| (I) uskonnollisuus | (J) uskonnollisuus | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|------------|------|-------------------------|-------------|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 1.00 | 2.00 | -1.2984* | .36904 | .004 | -2.3061 | -.2906 |
| | 3.00 | -1.6555* | .31536 | .000 | -2.5167 | -.7943 |
| | 4.00 | -2.5654* | .31745 | .000 | -3.4322 | -1.6985 |
| | 5.00 | -2.4547* | .42911 | .000 | -3.6265 | -1.2829 |
| 2.00 | 1.00 | 1.2984* | .36904 | .004 | .2906 | 2.3061 |
| | 3.00 | -.3571 | .31493 | .788 | -1.2171 | .5029 |
| | 4.00 | -1.2670* | .31702 | .001 | -2.1327 | -.4013 |
| | 5.00 | -1.1563 | .42879 | .055 | -2.3272 | .0146 |
| 3.00 | 1.00 | 1.6555* | .31536 | .000 | .7943 | 2.5167 |
| | 2.00 | .3571 | .31493 | .788 | -.5029 | 1.2171 |
| | 4.00 | -.9099* | .25251 | .003 | -1.5994 | -.2203 |
| | 5.00 | -.7992 | .38356 | .228 | -1.8466 | .2482 |
| 4.00 | 1.00 | 2.5654* | .31745 | .000 | 1.6985 | 3.4322 |
| | 2.00 | 1.2670* | .31702 | .001 | .4013 | 2.1327 |
| | 3.00 | .9099* | .25251 | .003 | .2203 | 1.5994 |
| | 5.00 | .1107 | .38528 | .999 | -.9414 | 1.1628 |
| 5.00 | 1.00 | 2.4547* | .42911 | .000 | 1.2829 | 3.6265 |
| | 2.00 | 1.1563 | .42879 | .055 | -.0146 | 2.3272 |
| | 3.00 | .7992 | .38356 | .228 | -.2482 | 1.8466 |
| | 4.00 | -.1107 | .38528 | .999 | -1.1628 | .9414 |

Based on observed means.

The error term is Mean Square(Error) = 16.921.

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Parittaiset testit, kun luokittelumuuttujana on *koulutusaste*.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: luottamus

Tukey HSD

| (I) koulutusaste | (J) koulutusaste | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------|------|-------------------------|-------------|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| Perusaste | Keskiaste | .1189 | .255 | .990 | -.5766 | .8143 |
| | Alin korkea-aste | -.3765 | .313 | .749 | -1.231 | .4779 |
| | Alempi korkeakouluaste | -.9025 | .340 | .061 | -1.830 | .0248 |
| | Ylempi korkeakouluaste | -1.6001* | .360 | .000 | -2.584 | -.616 |
| Keskiaste | Perusaste | -.1189 | .255 | .990 | -.8143 | .5766 |
| | Alin korkea-aste | -.4954 | .305 | .483 | -1.329 | .3385 |
| | Alempi korkeakouluaste | -1.0214* | .333 | .018 | -1.930 | -.113 |
| | Ylempi korkeakouluaste | -1.7190* | .354 | .000 | -2.685 | -.753 |
| Alin korkea-aste | Perusaste | .3765 | .313 | .749 | -.4779 | 1.231 |
| | Keskiaste | .4954 | .305 | .483 | -.3385 | 1.329 |
| | Alempi korkeakouluaste | -.5260 | .379 | .636 | -1.561 | .5092 |
| | Ylempi korkeakouluaste | -1.2236* | .398 | .018 | -2.310 | -.137 |
| Alempi korkeakouluaste | Perusaste | .9025 | .340 | .061 | -.0248 | 1.830 |
| | Keskiaste | 1.0214* | .333 | .018 | .1129 | 1.930 |
| | Alin korkea-aste | .5260 | .379 | .636 | -.5092 | 1.561 |
| | Ylempi korkeakouluaste | -.6976 | .419 | .456 | -1.842 | .4469 |
| Ylempi korkeakouluaste | Perusaste | 1.6001* | .360 | .000 | .6162 | 2.584 |
| | Keskiaste | 1.7190* | .354 | .000 | .7528 | 2.685 |
| | Alin korkea-aste | 1.2236* | .398 | .018 | .1375 | 2.310 |
| | Alempi korkeakouluaste | .6976 | .419 | .456 | -.4469 | 1.842 |

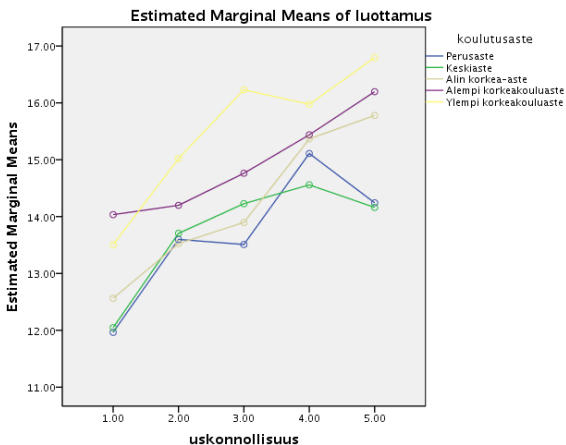
Based on observed means.

The error term is Mean Square(Error) = 16.921.

*. The mean difference is significant at the .05 level.

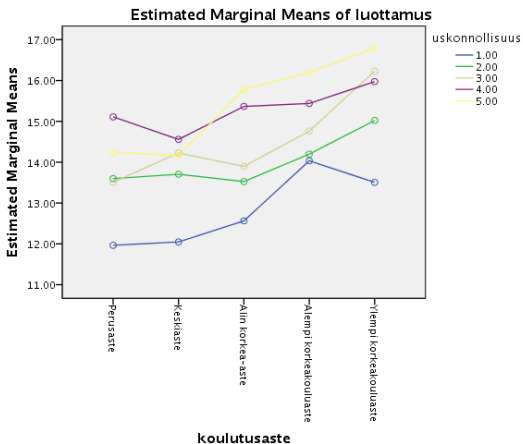
Kaksisuuntainen varianssanalyysi luottamus-muuttujalle

Uskonnollisuusryhmien keskiarvot koulutusasteen mukaan jaoteltuna.



Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Koulutusasteryhmien keskiarvot uskonnollisuuden mukaan jaoteltuna.



Kaksisuuntainen varianssanalyysi luottamus-muuttujalle

Luokittelumuuttujina *uskonnollisuus* ja *vasenoikea*.

Descriptive Statistics

Dependent Variable: luottamus

| | | Mean | Std. Deviation | N |
|-------|----------------|---------|-------------------|------|
| 1.00 | vasenoikea | | | |
| | uskonnollisuus | | | |
| | 1.00 | 12.6058 | 4.81055 | 57 |
| | 2.00 | 13.9219 | 4.32536 | 38 |
| | 3.00 | 13.0082 | 4.29891 | 64 |
| | 4.00 | 12.1453 | 4.67795 | 45 |
| 2.00 | 5.00 | 12.2775 | 4.67645 | 13 |
| | Total | 12.8398 | 4.54044 | 217 |
| | 1.00 | 12.5603 | 4.45268 | 142 |
| | 2.00 | 13.3930 | 4.58939 | 137 |
| | 3.00 | 13.9998 | 3.86901 | 301 |
| | 4.00 | 14.8686 | 4.05794 | 238 |
| 3.00 | 5.00 | 14.5817 | 4.26525 | 68 |
| | Total | 13.9533 | 4.22767 | 886 |
| | 1.00 | 12.5067 | 4.55777 | 49 |
| | 2.00 | 14.6879 | 3.71175 | 74 |
| | 3.00 | 15.0194 | 3.77193 | 177 |
| | 4.00 | 15.9494 | 3.50147 | 237 |
| Total | 5.00 | 16.0155 | 4.12638 | 65 |
| | Total | 15.2478 | 3.87955 | 602 |
| | 1.00 | 12.5602 | 4.53900 | 248 |
| | 2.00 | 13.8585 | 4.32696 | 249 |
| | 3.00 | 14.2157 | 3.93590 | 542 |
| | 4.00 | 15.1256 | 4.00751 | 520 |
| Total | 5.00 | 15.0149 | 4.35202 | 146 |
| | Total | 14.2687 | 4.22550 | 1705 |

Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Luokittelumuuttujina *uskonnollisuus* ja *vasenoikea*.

Tests of Between-Subjects Effects

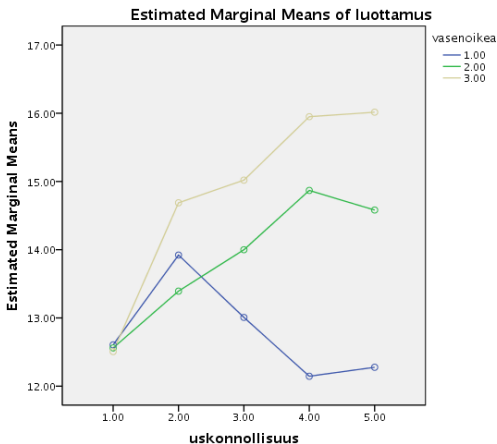
Dependent Variable: luottamus

| Source | Type III Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|--------------------------------|-------------------------|------|-------------|-----------|------|
| Corrected Model | 2284.639 ^a | 14 | 163.188 | 9.801 | .000 |
| Intercept | 169328.660 | 1 | 169328.660 | 10169.322 | .000 |
| uskonnollisuus | 429.288 | 4 | 107.322 | 6.445 | .000 |
| vasenoikea | 529.739 | 2 | 264.870 | 15.907 | .000 |
| uskonnollisuus * vasenoikea | 345.997 | 8 | 43.250 | 2.597 | .008 |
| Error | 28140.070 | 1690 | 16.651 | | |
| Total | 377553.190 | 1705 | | | |
| Corrected Total | 30424.709 | 1704 | | | |

a. R Squared = .075 (Adjusted R Squared = .067)

Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Uskonnollisuusryhmien keskiarvot poliittisen suunnan mukaan jaoteltuna.



Kaksisuuntainen varianssianalyysi luottamus-muuttujalle

Poliittisen suunnan ryhmien keskiarvot uskonnollisuusryhmien mukaan jaoteltuna.

