3 Regressioanalyysi

Regressioanalyysi on käytetyimpiä tilastotieteellisiä menetelmiä. Ei liene olemassa ainakaan kaupallista tilasto-ohjelmistoa, joka ei sisältäisi regressioanalyysiä. Yksi syy lienee, että se mahdollistaa muuttujan vaikutuksen suuruuden toiseen muuttujaan tai vaikutuksen olemassaolon ylipäätään arvioinnin ja testaamisen (tiettyjen oletusten pätiessä). Ne ovat polttavia kysymyksiä monen tutkijan mielessä. Regressioanalyysi on tässä mielessä usein hyvin antoisaa ja tuloksellista.

3.1 Yhden selittäjän lineaarinen regressiomalli

Tarkastellaan kahta muuttujaa y ja x. Edellisen pitää olla välimatka-asteikollinen; jälkimmäinen voi olla myös luokitteluasteikollinen. Muuttuja y määräytyy lineaarisen regressiomallin

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \tag{1}$$

mukaisesti x:n arvoista. Muuttujaa y kutsutaan selitettäväksi muuttujaksi ja muuttujaa x selittäväksi muuttujaksi, selittäjäksi tai regressoriksi. Viimeinen termi ε ("epsilon") on mallin jäännös eli satunnaistermi, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi on σ^2 ("sigma toiseen"). Kreikkalaisilla kirjaimilla — esimerkiksi β_0:lla ja β_1:llä ("beeta-nollalla" ja "beeta-yhdellä") — tavataan merkitä tilastollisten mallien parametreja ja niin edelläkin. Mallin parametrit ovat kiinteitä lukuja (esim. $\beta_0 = 90,5$ ja $\beta_1 = 0,5$), joiden suuruudet (tyypillisesti) ovat tuntemattomia ja joiden selvittämiseen regressioanalyysillä pyritään. Parametria β_0 kutsutaan usein mallin vakioksi ja parametria β_1 (regressio)kertoimeksi.

Luvussa 1 viitattu systemaattinen komponentti on yhden selittäjän regressiossa selitettävän (selittäjän x arvolle ehdollinen) odotusarvo

$$\mathsf{E}(y) = \mathsf{E}(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Yllä $\mathsf{E}(\cdot)$ on odotusarvon symboli ja on käytetty oletusta $\mathsf{E}(\varepsilon) = 0$.

Tavalliseen x, y-koordinaatistoon funktio $y = \beta_0 + \beta_1 x$ piirtyy suorana, jonka kulmakerroin on β_1 ja joka leikkaa y-akselin kohdassa β_0. Periaatteessa β_0 kertoo siten selitettävän odotusarvon, kun selitettävän arvo on 0:

$$\mathsf{E}(y) = \mathsf{E}(\beta_0 + \beta_1 \times 0 + \varepsilon) = \beta_0.$$

Empiirisessä analyysissa tämä tulkinta ei ole aina järkevä, mihin palataan myöhemmin (jaksot 3.1.1 ja 3.3).

Mallin mukaan y:n suuruus riippuu x:n suuruudesta lineaarisesti parametrin β_1 välityksellä: Jos x muuttuu yksikön verran, niin y muuttuu β_1:n verran. Esimerkiksi jos y on lapsen pituus, x on isän pituus ja $\beta_1 = 0,5$, niin mallin mukaan lapsen pituus tapaa olla $0,5$ senttimetriä pidempi, jos isä on senttimetrin pidempi. Vakio β_0 asettaa mallin kuvaaman suoran sopivalle korkeudelle. Jäännös ε kuvaa y:n vaihtelua, joka ei selity x:n vaihtelulla. Esimerkiksi lapsen pituuteen vaikuttaa muitakin tekijöitä kuin isän pituus (jakso 1). Ne jäävät mallissa huomioimatta ja puristetaan ε:iin.

Erikoistapaus on $\beta_1 = 0$. Tällöin malli (1) typistyy niin, että y on satunnaisesti jakautunut vakion β_0 ympärillä:

$$y = \beta_0 + 0 \times x + \varepsilon = \beta_0 + \varepsilon. \tag{2}$$

Kiinnostavin asia mallissa (1) onkin tyypillisimmin parametrin β_1 suuruus — esimerkiksi poikkeaako se nollasta eli päteekö malli (1) vai (2).

Regressioanalyysi on keino arvioida parametrien suuruutta ja systemaattista komponenttia, kun mallin kuvaamasta ilmiöstä on havaintoaineisto. Mallin (1) kohdalla aineisto koostuisi havaintopareista $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Tässä $n \geq 2$ on havaintojen lukumäärä.

Galtonin herneen siemen -vanhemmat ja niiden jälkipolvi sekä vanhempien ja lasten pituudet -esimerkit (jakso 1) havainnollistavat regressiota odotusarvoa kohti mallin (1) mukaisesti, kun $0 < \beta_1 < 1$. Kuvitteellinen sosiaalitukien saajat -esimerkki (jakso 1) vastaa mallia (2): Sosiaalitukien saajien lukumäärä edellisenä vuonna (x) ei auta ennustamaan heidän lukumääräänsä kuluvana vuonna (y): Kerroin $\beta_1 = 0$, ja lukumäärät pyrkivät palautumaan kohti odotusarvoaan β_0.

Oheiseen hajontakuvioon on piirretty keinotekoinen aineisto ($n = 25$) — vaikkapa helsinkiläisten isien (x) ja heidän poikiensa (y) pituuksista aikuisina.[11] Kukin piste vastaa yhtä havaintoparia (x_i, y_i). Mitä pidempi isä on, sitä pidempi vaikuttaa poika olevan. Mutta kuinka paljon? Voitaisiinko havaintopisteiden yhteys tiivistää suoraksi, jonka parametreista voitaisiin päätellä vaikutuksen keskimääräinen suuruus?

3.1.1 Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

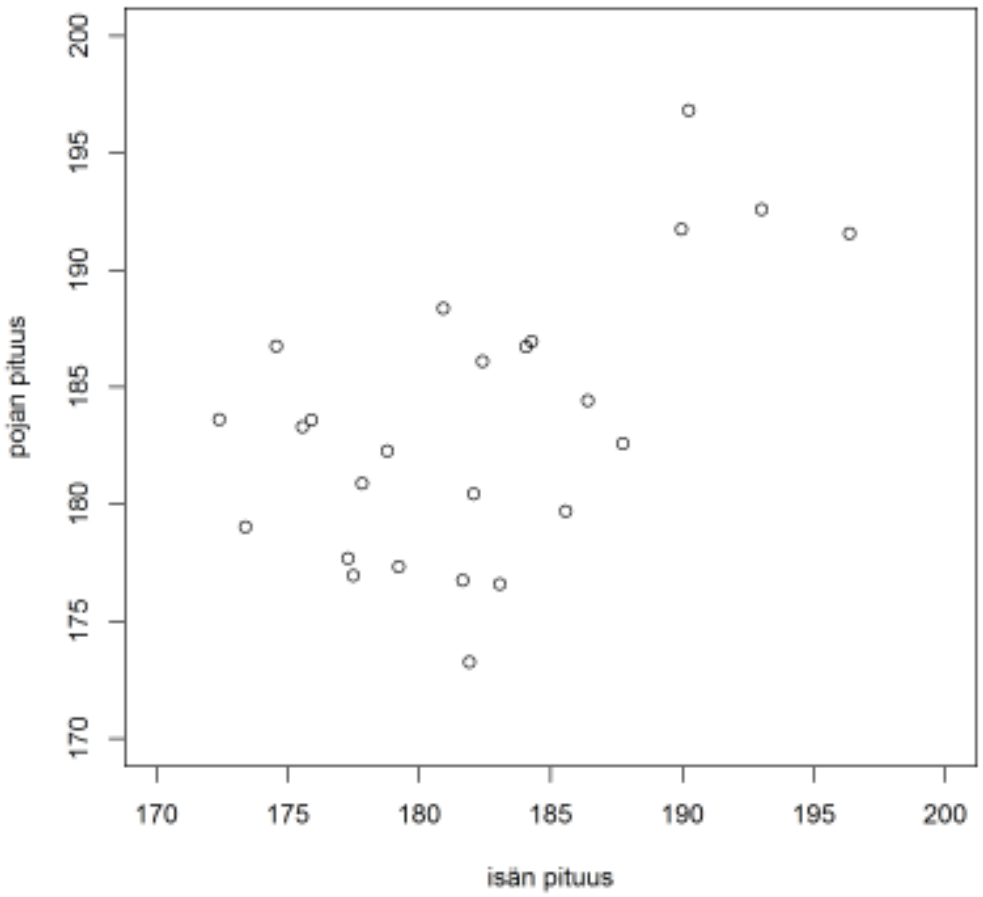
Yhden selittäjän regressiossa aineistoon sovitetaan regressiosuora, joka summeeraa muuttujien välisen riippuvuuden eli systemaattisen osan. Regressiosuoran parametriarvot ovat vastaus edellä esitetyn tapaisiin kysymyksiin.

Sovittaminen voidaan tehdä periaatteessa monella tavalla. Ylivoimaisesti käytetyin tapa on pienimmän neliösumman (PNS) menetelmä. Siinä parametrit β_0 ja β_1 valitaan niin, että y_i-havaintojen poikkeamat sovitettavasta suorasta neliöidään ja neliöiden summa minimoidaan:

$$\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

[11] Aineisto on luotu olettaen sekä isien että poikien keskipituudeksi ja -hajonnaksi 181,0 cm ja 6,06 cm. Nämä ovat uusimpien suomalaisten miesten pituustietojen mukaiset luvut (professori Leo Dunkell, henkilökohtainen tiedonanto 16.3.2010). Isien ja poikien pituuden korrelaatioksi on oletettu 0,5, joka vastaa melko tarkasti todellista korrelaatiota (esim. Karl Pearson ja Alice Lee (1903): On the Laws of Inheritance in Man: I. Inheritance of Physical Characters. *Biometrika*, 2, 357–462).

Aineisto, kuviot ja analyysit alla tehtiin R-ohjelmiston version 3.0.2 ja sen MASS-paketin avulla. (R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Wien. URL http://www.
R-project.org/ ja Venables, W. N. & Ripley, B. D. (2002) *Modern Applied Statistics with S.* 4. laitos. Springer, New York.



Kuva 4:

Yllä merkintä "min" tarkoittaa, että sen oikealla puolella oleva lauseke minimoidaan min-merkinnän alapuolelle merkittyjen suureiden suhteen. Minimoinnin voi ajatella tapahtuvan ikään kuin kokeilemalla eri lukuarvoja β_0:lle ja β_1:lle ja valitsemalla sellainen β_0, β_1-pari, että lauseke $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ ei voi saada pienempiä arvoja. (Todellisuudessa tilasto-ohjelmisto ratkaisee minimointitehtävän yhdellä laskutoimituksella eikä kokeile eri arvoja.) Poikkeamien suoralta $y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ kasvaessa (itseisarvoltaan) kasvaa neliösumma $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ nopeasti. PNS-menetelmä pyrkii siten tuottamaan regressiosuoran, joka ei koskaan sijoittuisi kovin kauas yhdestäkään havaintopisteestä. Termien $(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$ neliöinnin takia minimoinnin kannalta ei ole väliä, onko y_i suurempi tai pienempi kuin mallin mukainen arvo $\beta_0 - \beta_1 x_i$. Kaikkia poikkeamia kohdellaan tässä mielessä samanarvoisesti.

Neliösumman minimoivia parametriarvoja kutsutaan PNS-estimaateiksi ja niitä merkitään $\hat{\beta}_0$:lla ja $\hat{\beta}_1$:lla ("$\wedge$" luetaan "hattu"). Suureita

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

kutsutaan sovitteiksi ja suureita

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

residuaaleiksi $(i = 1, \ldots, n)$. Regressiosuora $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ saadaan piirtämällä hajontakuvioon suora sovitteiden $(\hat{y}_i)$ kautta. Residuaalit $(\hat{\varepsilon}_i)$ ovat jäännösten (ε_i) estimaatteja.

Sovite $\hat{y}_i$ voidaan ilmaista muuttujien keskiarvojen $\bar{y}$ ja $\bar{x}$ avulla:

$$\hat{y}_i = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}).$$

Sovite poikkeaa $\bar{y}$ -keskiarvosta $\hat{\beta}_1$ kertaa x_i:n poikkeaman omasta keskiarvostaan verran. Regressiosuora kulkee siten aina pisteen $(\bar{x}, \bar{y})$ kautta.

Tärkeä käsite on residuaalineliösumma

$$\mathsf{RNS} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

Nimityksensä mukaisesti se on summa residuaalien neliöistä. Se on sitä suurempi, mitä enemmän y_i-havainnot poikkeavat sovitteista $\hat{y}_i$. Sen avulla lasketaan estimaatti jäännöksen varianssille:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2.$$

Jäännösvarianssin estimaatti $\hat{\sigma}^2$ mittaa residuaalin neliön keskimääräistä suuruutta eli vaihtelevuutta aineistossa.[12] Yleensä toivotaan, että $\hat{\sigma}^2$ olisi pieni, koska silloin malli selittää hyvin y:n vaihtelun. Monesti raportoidaan jäännöksen estimoitu keskihajonta $\mathsf{SD}(\hat{\sigma}^2) = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \hat{\sigma}$ (*standard deviation*), koska se on samassa mittayksikössä kuin selitettävä muuttuja ja on siksi helpompi hahmottaa.

Määritellään vastaavasti kokonaisneliösumma

$$\mathsf{KNS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2. \tag{3}$$

Siinä $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$ eli y_i-havaintojen keskiarvo. Kokonaisneliösumma kuvaa, kuinka suurta on y_i-havaintojen vaihtelu keskiarvonsa ympärillä.

Neliösummista saadaan mallin selityskyvylle mittari selitysosuus

$$\mathsf{R}^2 = \frac{\mathsf{KNS} - \mathsf{RNS}}{\mathsf{KNS}} = 1 - \frac{\mathsf{RNS}}{\mathsf{KNS}}. \tag{4}$$

Selitysosuus saa lähellä yhtä olevia arvoja, mikäli residuaalineliösumma on pieni suhteessa selitettävän kokonaisneliösummaan ($\mathsf{RNS}/\mathsf{KNS} \approx 0$). Tällöin y selittyy hyvin x:llä. Mikäli x:llä ei ole selityskykyä, residuaalineliösumma ei eroa paljoa kokonaisneliösummasta ($\mathsf{RNS}/\mathsf{KNS} \approx 1$). Tällöin selitysosuus on lähellä nollaa.

Selitysosuus on siten hyvin intuitiivinen mittari mallin hyvyydelle. Nyt esillä olevassa yhden selittäjän regression tilanteessa se onkin tutun otoskorrelaatiokertoimen (r) neliö:

$$\mathsf{R}^2 = r^2. \tag{5}$$

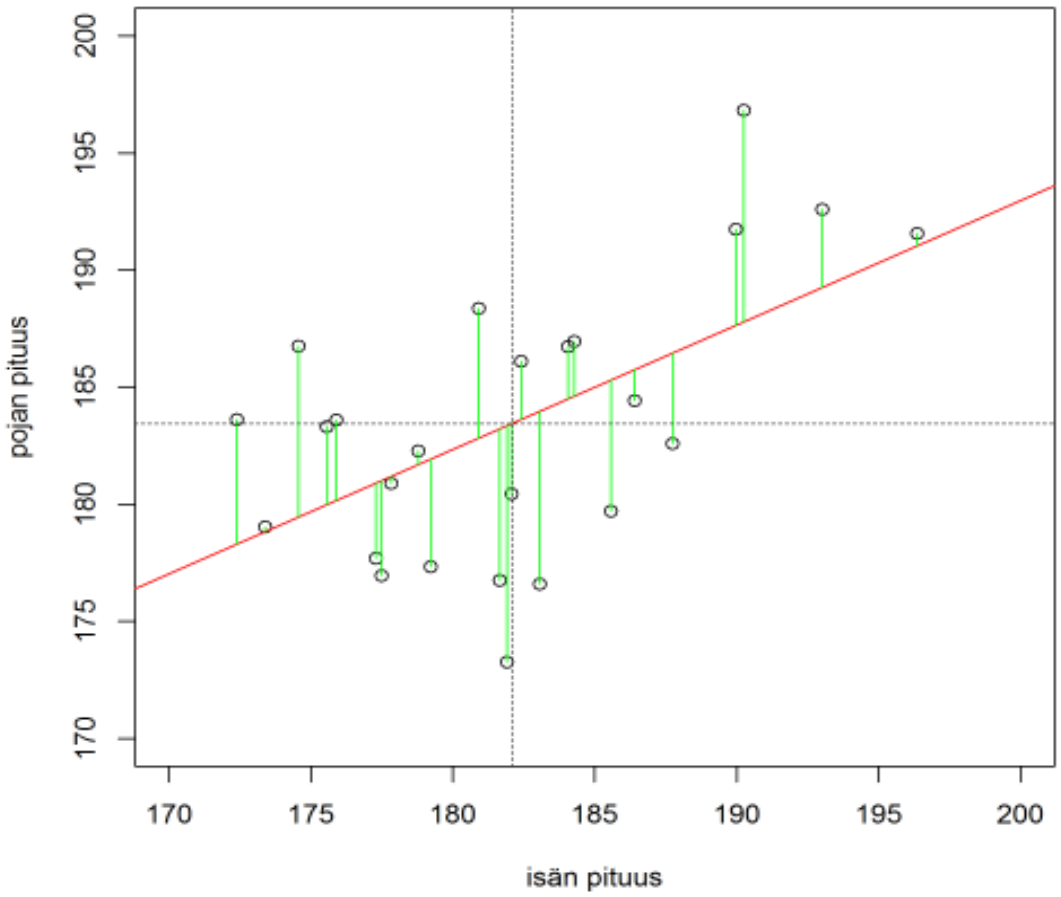
Kuvio 5 havainnollistaa käsitteitä isä-poika -aineiston avulla. Regressiosuora määrittää sovitteen kunkin x_i-havainnon kohdalla. Residuaalit ovat (x_i, y_i)-havainnoista regressiosuoraan pystysuorasti meneviä viivoja. Toinen suora tuottaisi toiset residuaalit. Kuvion residuaalien neliöiden summa on pienin mahdollinen.

Mallin (1) PNS-estimointi tuotti tästä aineistosta tulokset

$$\begin{aligned} y &= 86{,}79 + 0{,}531x + \hat{\varepsilon} \\ &= 182{,}1 + 0{,}531(x - 183{,}5) + \hat{\varepsilon}, \\ \hat{\sigma} &= 4{,}96, \quad \mathsf{R}^2 = 0{,}313. \end{aligned}$$

Malli ennustaa pojalle lisää pituutta 0,531 eli noin 0,5 senttimetriä isän pituuden kasvaessa senttimetrillä ja selittää noin 31 % lasten pituuden vaihtelusta

[12] Syy jakaa RNS $n-2$:lla eikä n:llä liittyy näin saadun σ^2:n estimaatin teoreettisiin ominaisuuksiin ja jaksossa 3.1.2 käsiteltävään jakaumateoriaan. Muistisääntö on, että PNS-estimoinnissa havaintoja "menetetään"yksi kutakin estimoitua parametria kohti. Vrt. $\hat{\sigma}^2$:n kaava (9) monen selittäjän regressiomallissa (7).



Kuva 5:

aineistossa. Kaavasta (5) seuraa, että otoskorrelaatio on selitysosuuden neliöjuuri: $r = \sqrt{\mathsf{R}^2}$. Pituuksien otoskorrelaatio on siten $\sqrt{0{,}313} \approx 0{,}559$. Jäännöksen estimoitu keskihajonta on 4,96.

Koska aineisto oli keinotekoinen, estimointituloksia voidaan verrata aineiston tuottaneeseen todelliseen malliin. Suureiden todelliset arvot ovat $\beta_0 = 90{,}5$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\sigma \approx 5{,}25$ (seuraa tehdyistä oletuksista tavalla, jota ei tässä selitetä), korrelaatio populaatiossa $\rho = 0,5$ ja selitysosuus populaatiossa $\mathsf{R}^2 = \rho^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25$. Kaikki suureet tulivat estimoiduksi varsin hyvin.

Kuten usein on, estimoidulla vakiolla ei ole järkevää tulkintaa. Estimoidun mallin ja vakion mukaan pojan pituus olisi noin 87 senttimetriä, jos isän pituus olisi 0 senttimetriä (kuvio 6), mikä on järjetön ajatus. Malli ei välttämättä antaisi luotettavaa ennustetta edes periaatteessa mahdollisen mutta poikkeukselisen lyhyen isän (esim. $x = 155$) pojan pituudelle. Regressiomalleja ei ylipäänsä kannata yrittää soveltaa aineiston vaihteluvälin ulkopuolella.

Edellä implisiittisesti oletettiin, että kaikki x_i-havainnot eivät ole yhtäsuuria. Jos ne olisivat, β_0- ja β_1-parametreja ei voisi estimoida (kuvio 7 havainnollistaa β_1:n estimoinnin mahdottomuutta). Seuraavassa jaksossa tarvitaan muitakin oletuksia.

3.1.2 Yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin testaus

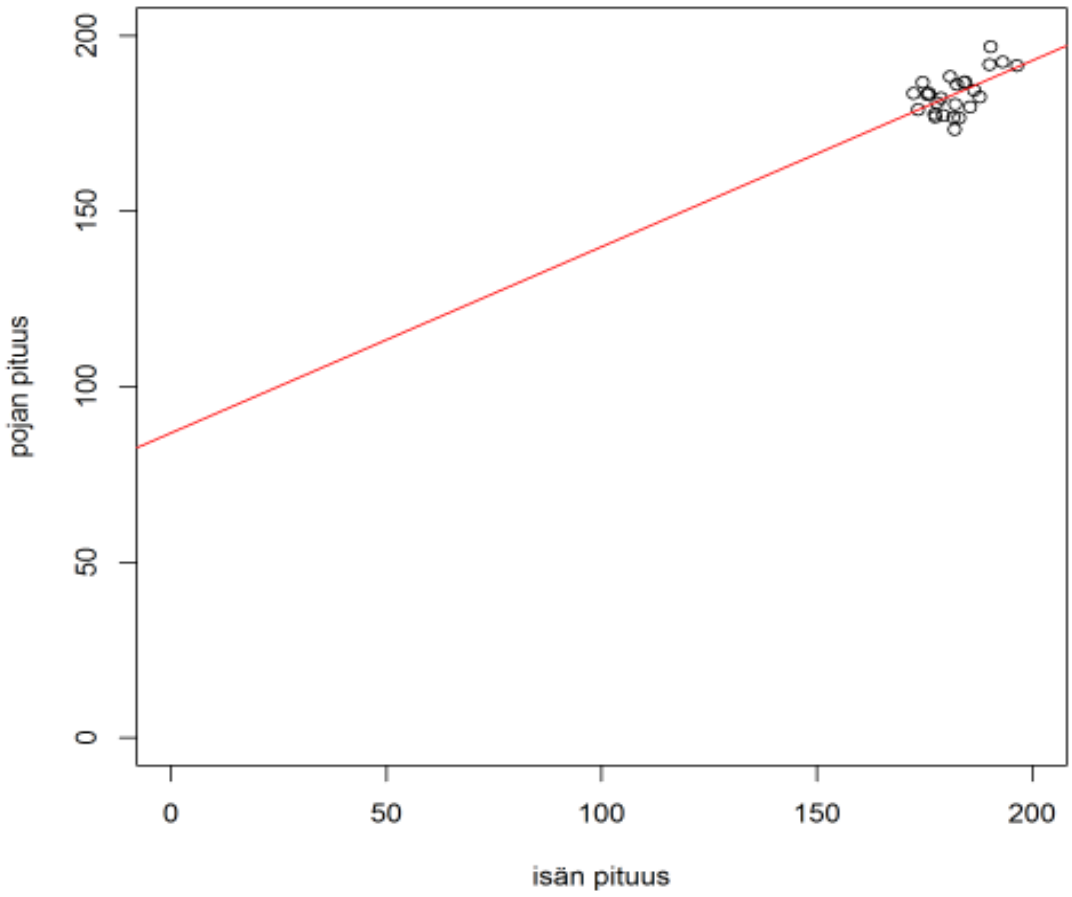
Ei ole harvinaista, että tutkijan päämielenkiinto on estimoinnissa. Vaikka se ei olisi, pääsääntöisesti ei koskaan tulisi rajoittaa regressiomallin tarkastelua vain estimointituloksiin. Mallia tulisi aina testata. Filosofia on sama kuin muutenkin tilastotieteessä: Pelkkä estimaatin tai yleisemmin tilastollisen tunnusluvun subjektiivinen arviointi ei ole riittävää; tulee myös testata, poikkeaako tunnusluku nollasta tai muusta oleelliseksi katsotusta arvosta tilastollisesti merkitsevästi. Hedelmällisen tilastotieteen soveltamisen tunnusmerkkejä on, että on arvioitu sekä tunnuslukujen merkittävyyttä sovellusalan kannalta että niiden tilastollista merkitsevyyttä testien tai luottamusvälien avulla.

Regressioanalyysillä voidaan testata parametreihin liittyviä nollahypoteeseja (H_0). Sellaisia ovat esimerkiksi H_0: $\beta_1 = 0$ tai H_0: $\beta_1 = 1$. Vakion suuruutta testataan harvoin muun muassa, koska sillä ei ole usein selkeää sovellukseen liittyvää merkityksellistä tulkintaa (vrt. isä-poika -malli edellä).

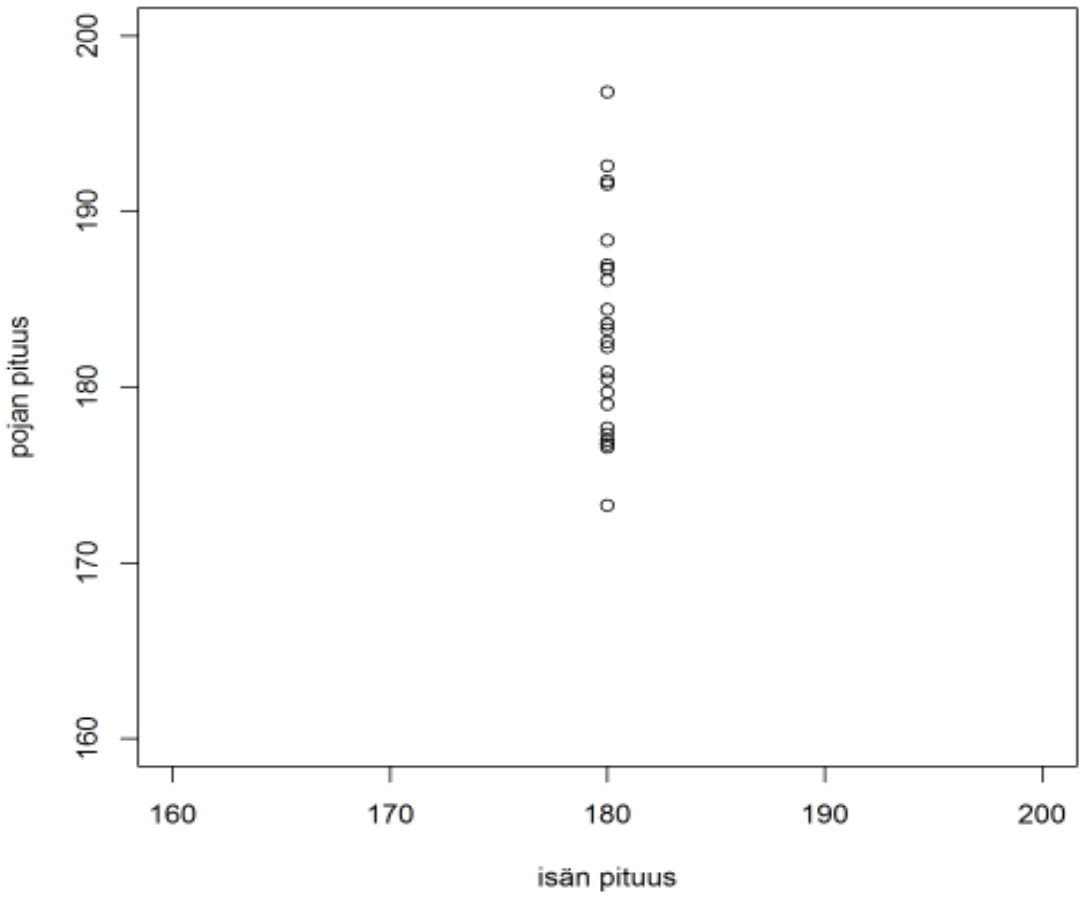
Hypoteesien testaukseen tarvitaan lisäoletuksia:

- Selittävä muuttuja x on kiinteä (siinä ei ole satunnaisuutta).
- Jäännös noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla σ^2: $\varepsilon_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Jäännökset ε_i eivät korreloi keskenään eli ne ovat riippumattomia toisistaan (normaalijakauman tilanteessa korreloimattomuudesta seuraa riippumattomuus).

Oleellista on ymmärtää, että $\hat{\beta}_1$ on satunnaismuuttuja. Se saa yhden tietyn arvon tutkittavana olevassa aineistossa. Jos tutkittavana olisi toinen —



Kuva 6:


pojan pituus
160
170
180
190
200
160
170
180
190
200
isän pituus

Kuva 7:

esimerkiksi espoolainen 25 havainnon aineisto isien ja poikien pituuksista — saataisiin toisensuuruinen $\hat{\beta}_1$. Samoin estimaatti muuttuisi, jos tutkittaisiin 25 vantaalaisen, 25 kaunialaisen jne. aineistoa isien ja poikien pituuksista. Koska $\hat{\beta}_1$ on satunnaismuuttuja, on sillä (ilmeisesti) myös keskihajonta, jota kutsutaan tässä yhteydessä keskivirheeksi. ("Virhe", koska tavoitteena on estimoida β_1, missä ei täysin onnistuta.)

Edellä lueteltujen oletuksien pätiessä estimaatteihin liittyvä jakaumateoria tunnetaan. Tavalla, jota tässä ei selitetä, voidaan laskea (otos)keskivirhe $\hat{\beta}_1$:lle ($\mathsf{SD}(\hat{\beta}_1)$) ja muodostaa niin sanottu t-testisuure eli t-arvo

$$t_{\beta_1=\beta_1^0} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\mathsf{SD}(\hat{\beta}_1)} \sim \mathsf{t}_{n-2}.$$

Nollahypoteesin H_0: $\beta_1 = \beta_1^0$ pätiessä se noudattaa ("$\sim$") t-jakaumaa vapausasteilla $n-2$. Huomionarvoista on, että jakauma riippuu havaintojen lukumäärästä mutta tunnetaan kaikilla havaintomäärillä. Testisuure on hyvin intuitiivinen. Estimaatin $\hat{\beta}_1$ poikkeama nollahypoteesin mukaisesta arvosta β_1^0 suhteutetaan estimaatin keskivirheeseen. Suurikaan poikkeama ei ole tilastollisesti merkitsevä, jos $\hat{\beta}_1$:n keskivirhe on suuri. Toisaalta pienikin poikkeama on tilastollisesti merkitsevä, jos $\hat{\beta}_1$:n keskivirhe on hyvin pieni. Keskivirhe pienenee havaintojen lukumäärän kasvaessa. (Muutkin tekijät vaikuttavat keskivirheen suuruuteen.)

Tyypillisimmin testataan nollahypoteesia $\beta_1 = 0$. Tällöin testisuure on yksinkertaisesti β_1:n estimaatti jaettuna keskivirheellään:

$$t_{\beta_1=0} = \frac{\hat{\beta}_1}{\mathsf{SD}(\hat{\beta}_1)} \sim \mathsf{t}_{n-2}. \tag{6}$$

Monet tilasto-ohjelmistot tulostavat tämän testisuureen regressoitaessa selitettävää yhdellä selittävällä muuttujalla. Toiset ohjelmistot raportoivat PNS-estimaatin ja sen keskivirheen, jolloin käyttäjän tehtävä on muodostaa osamäärä $\hat{\beta}_1/\mathsf{SD}(\hat{\beta}_1)$. Tieteellisissä artikkeleissa käytäntö vaihtelee: Joissain raportoidaan estimaatti ja t-arvo ja toisissa estimaatti ja sen keskivirhe. Jälkimmäisessä tilanteessa lukijan tulee osata itse muodostaa t-arvo, jos haluaa tietää sen suuruuden.

Testaaminen etenee tämän jälkeen tavanomaiseen tapaan eli valitaan sopivaksi katsottu riskitaso (esim. 5, 1 tai 0,1 %), ja katsotaan, onko testisuureen itseisarvo suurempi kuin riskitasoon liittyvä kriittinen arvo (kaksisuuntainen testaus). Esimerkiksi 5 %:n riskitasoa käytettäessä kriittiset arvot olisivat isä-poika -esimerkissä t-jakauman $25-2 = 23$:lla vapausasteella 2,5. tai 97,5. persentiilit.

Tilasto-ohjelmistot usein raportoivat testisuureeseen liittyvän p-arvon, joka on todennäköisyys saada havaittu tai vielä poikkeavampi testisuureen arvo

nollahypoteesin pätiessä. Jos ohjelmiston raportoima p-arvo on esimerkiksi alle 0,05, niin nollahypoteesi hylätään 5 %:n riskitasolla. Jos ohjelmisto ei raportoi p-arvoa, voi kriittiset arvot silti usein laskea tilasto-ohjelmiston avulla. Vaihtoehtoisesti voidaan kriittisiä arvoja katsoa t-jakaumataulukoista. Niistä ei ole taulukoitu kriittisiä arvoja kaikille mahdollisille havaintojen lukumäärille mutta on käytännön kannalta riittävälle määrälle.

Isä-poika -esimerkissä $\hat{\beta}_1$:n keskivirhe on 0,164, joten t-arvo on 0,531/0,164 $\approx$ 3,238. Esimerkin laskussa käytetty R-ohjelmisto raportoi sekä keskivirheen että t-arvon, joka täsmää juuri lasketun kanssa. Ohjelmiston mukaan p-arvo on noin 0,004, joten nollahypoteesi $\beta_1 = 0$ hylätään 5 %:n riskitasolla ja paljon pienemmilläkin riskitasoilla. Samaan tulokseen päädytään vertaamalla t-arvoa 3,238 t-jakauman 25. vapausasteella 97,5. persentiiliin 2,069 (oheisesta taulukosta).

Testin mukaan isien ja lasten pituus ovat yhteydessä ($\beta_1 \neq 0$). Tulos on tietenkin odotettu. Mikäli tutkittava ilmiö olisi tuntemattomampi. keskeinen osa regressioanalyysia olisi testata, poikkeaako parametri β_1 nollasta. Mikäli nollahypoteesia ei hylättäisi (t-arvo olisi itseisarvoltaan pienempi kuin kriittiset arvot), pääteltäisiin, että muuttujien välillä ei ole yhteyttä tai että aineisto ei ainakaan ole ristiriidassa oletuksen yhteyden puuttumisesta kanssa. Mallin selitysosuus olisi tällöin lähellä nollaa (mieti miksi!), ja kaavan (5) perusteella muuttujien välinen otoskorrelaatio olisi samoin lähellä nollaa.

3.2 Monen selittäjän lineaarinen regressiomalli

Selitettävä muuttuja y määräytyy nyt monen selittävän muuttujan x_i ($i = 1, \ldots, k$) lineaarisesta regressiomallista

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon. \tag{7}$$

Mallin tulkinta on samantapainen kuin mallin (1). Selitettävä y on välimatka-asteikollinen, selittäjät x_i voivat olla myös luokitteluasteikollisia ja jäännös ε on satunnaistermi odotusarvolla 0 ja varianssilla σ^2. Siihen tiivistyy y:n vaihtelu, joka ei selity x_i:den vaihtelulla. Parametrit $\beta_0, \ldots, \beta_k$ ovat kiinteitä yleensä tuntemattomia lukuja, joiden suuruudet pyritään selvittämään regressioanalyysilla (eritoten β_1:stä β_k:hon). Parametria β_0 kutsutaan vakioksi ja parametreja $\beta_1, \ldots, \beta_k$ (regressio)kertoimiksi.

Mallin (7) systemaattinen komponentti on selitettävän (selittäjien x_i arvoille ehdollinen) odotusarvo

$$\mathsf{E}(y) = \mathsf{E}(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k. \tag{8}$$

Vakio kuvaa nyt selitettävän odotusarvoa, kun kaikki selittäjät saavat arvon 0:

$$\mathsf{E}(y) = \mathsf{E}(\beta_0 + \beta_1 \times 0 + \cdots + \beta_k \times 0 + \varepsilon) = \beta_0.$$

Kuten yhden selittäjän regressiossa (jakso 3.1.1), tämä tulkinta ei ole aina järkevä.

Kerroin β_i kuvaa x_i:n yksikön suuruisen muutoksen vaikutuksen y:hyn, kun muut selittäjät eivät muutu. Monesti mielenkiintoisin kysymys on, ovatko β_i-kertoimet nollia eli selittääkö x_i:den vaihtelu lainkaan y:n vaihtelua.

Monen selittäjän regressiomallin (7) systemaattisen komponentin ja parametrien selvittäminen edellyttää n:stä havaintovektorista $[x_{11} \ \ldots \ x_{1k} \ y_1], \ldots, [x_{n1} \ \ldots \ x_{nk} \ y_n]$ koostuvaa aineistoa ($n \geq k$). Muuttujien ensimmäinen indeksi on havainnon numero ($i = 1, \ldots, n$) ja jälkimmäinen indeksi kertoo, mistä selittäjästä havaintoarvo x_{ij} on ($j = 1, \ldots, k$).

3.2.1 Monen selittäjän lineaarisen regressiomallin estimointi

Monen selittäjän regressiossa aineistoon sovitetaan selitettävän ja selittäjien välisen riippuvuuden summeeraava lineaarinen funktio eli mallin (7) systemaattinen osa (8).[13] Sovittaminen tehdään yleisimmin PNS-menetelmällä jaksossa 3.1.1 esitettyyn tapaan. Parametrien $\beta_0, \ldots, \beta_k$ lukuarvot valitaan minimoimaan y_i-havaintojen poikkeamien systemaattisesta komponentista neliöiden summa:

$$\min_{\beta_0,\ldots,\beta_k} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k)]^2 = \min_{\beta_0,\ldots,\beta_k} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1 - \cdots - \beta_k x_k)^2.$$

Neliösumman minimoivat parametriarvot ovat PNS-estimaateja $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_k$. Jaksossa 3.1.1 selitetyt käsitteet yleistyvät muutenkin suoraviivaisesti k:n selittäjän tilanteeseen. Sovitteet ($\hat{y}_i$), residuaalit ($\hat{\varepsilon}_i$), residuaalineliösumma ja jäännöksen varianssin estimaatti ovat nyt

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik},$$

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik}) = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik},$$

$$\mathsf{RNS} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

ja

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \cdots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2. \tag{9}$$

Kokonaisneliösumman ja selitysosuuden kaavat (3) ja (4) eivät muutu. Merkittävä ero on, että selitysosuuden ja otoskorrelaation neliöt sitova kaava (5) pätee nyt, kun otoskorrelaatiokerroin r on laskettu selitettävän muuttujan y_i ja sen sovitteen $\hat{y}_i$ välille. (Tämä tulkinta on mahdollinen myös yhden selittäjän regression mallin kohdalla.)

[13] Systemaattisen osan geometrinen tulkinta ei ole yhtä helppo kuin yhden selittäjän regressiossa, jossa aineistoon sovitettiin suora. Mikäli selittäjiä on kaksi, sovitetaan aineistoon kaksiulotteinen taso.

3.2.2 Monen selittäjän lineaarisen regressiomallin testaus

Testaamista varten jaksossa 3.1.2 tehtyjä oletuksia pitää täydentää olettamalla nyt, että kaikki selittävät muuttujat x_i ovat kiinteitä (niissä ei ole satunnaisuutta). Lisäksi yhdenkään selittäjän x_i arvot eivät saa riippua täydellisesti lineaarisesti muiden selittäjien x_j, $j \neq i$, arvoista.[14]

Ehkä tärkein ja useimmin testattu monen selittäjän regressiomallin (7) β_i-kertoimia koskeva nollahypoteesi on, että ne ovat kaikki nollia (H_0: $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$). Nollahypoteesin mukaan selittäjillä x_i ei ole tällöin lainkaan selityskykyä selitettävän muuttujan y suhteen. Tämän hypoteesin päteminen tai pätemättömyys on tutkijalle usein keskeisimpiä kysymyksiä. Nollahypoteesia testaava F-testisuure on hyvin yksinkertainen:

$$F = \frac{\mathsf{R}^2/k}{(1-\mathsf{R}^2)/(n-k-1)} \sim \mathsf{F}_{k,n-k-1} \tag{10}$$

Nollahypoteesin H_0: $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ pätiessä se noudattaa F-jakaumaa k:lla ja $n-k-1$:llä vapausasteella. Jälleen (vrt. jakso 3.1.2) jakauma riippuu havaintojen lukumäärästä ja on tunnettu kaikilla havaintomäärillä.

Useimmat tilasto-ohjelmistot laskevat F-testisuureen automaattisesti regression yhteydessä. Testisuureen suuret arvot ovat testin kannalta hälyttäviä. Mikäli tilasto-ohjelmisto ei ilmoita F-testisuureen p-arvoa, voidaan testisuureen arvon tilastollinen merkitsevyys arvioida F-jakauman taulukoitujen kriittisten arvojen avulla.

F-testisuureella on selkeä intuitio. Mikäli selittäjät x_i kykenevät selittämään suuren osan selitettävän y vaihtelusta (KNS), niin jäljelle jäävä selittämätön vaihtelu (RNS) muodostuu pieneksi ja selitysosuus R^2 suureksi (kaava (4)). Kaavasta (10) nähdään, että mitä suurempi R^2 on, sitä suurempi on F-testisuure. F-testi siis hälyttää, kun selittäjillä on aineistossa hyvä selityskyky. Myös havaintojen lukumäärän kasvattaminen pyrkii kasvattamaan F-testisuuretta ja todennäköisyyttä hylätä nollahypoteesi, kun se ei päde. Mikäli nollahypoteesi pätee, R^2 tapaa jäädä pieneksi ja F-testisuure samoin.

Yleisiä mallin (7) parametreja koskevia nollahypoteeseja ovat, että i:nnen selittäjän kerroin on nolla (H_0: $\beta_i = 0$) tai että se on tietyn suuruinen (H_0: $\beta_i = \beta_i^0$). Edellisessä tilanteessa i:nnettä selittäjää ei tarvittaisi regressiossa (7). Näitä nollahypoteeseja voidaan testata jaksosta 3.1.2 tutuilla t-testisuureilla:

$$t_{\beta_i=\beta_i^0} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^0}{\mathsf{SD}(\hat{\beta}_i)} \sim \mathsf{t}_{n-k-1}.$$

[14] Yhden selittäjän tilanteessa jälkimmäinen ehto merkitsee, että kaikki ainoan selittäjän havainnot eivät saa olla samoja. Tätä tilannetta sivuttiin jakson 3.1.1 lopussa. Useamman selittäjän tilanteessa ei esimerkiksi ole sallittua, että yhden selittäjän arvot olisivat toisen selittäjän arvoja kerrottuna jollain luvulla.

ja

$$t_{\beta_i=0} = \frac{\hat{\beta}_i}{\mathsf{SD}(\hat{\beta}_i)} \sim \mathsf{t}_{n-k-1}. \tag{11}$$

Vastaavan nollahypoteesin pätiessä ne noudattavat t-jakaumaa vapausasteilla $n-k-1$. Jakauma riippuu havaintojen lukumäärästä mutta tunnetaan kaikilla havaintomäärillä. Tilasto-ohjelmisto raportoi yleensä automaattisesti jälkimmäisen t-arvon kaikkien selittäjien estimoiduille kertoimille tai niiden keskivirheet $\mathsf{SD}(\hat{\beta}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Testaus tapahtuu käytännössä jaksossa 3.1.2 selitetyllä tavalla. Siellä kuvattiin myös t-testisuureiden intuitio.

Monesti on kiinnostavaa testata, olisikovatko mallin (7) d $(0 < d \leq k)$ oikeanpuoleisinta selittäjää tarpeettomia eli päteekö $\beta_{k_r+1} = \cdots = \beta_k = 0$, jossa $k_r = k - d > 0$. (Oletus tarpettomien selittäjien sijoittumisesta mallin oikeanpuoleisimmiksi tehdään merkintöjen yksinkertaistamiseksi.) Edellä "r" viittaa rajoitettuun. Näin rajoitettu malli olisi

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k_r} x_{k_r} + \varepsilon. \tag{12}$$

Se saadaan mallista (7) erikoistapauksena asettamalla d kappaletta β_i-kertoimia nollaksi $(k_r + 1)$. selittäjästä lähtien.

Nollahypoteesia H_0: $\beta_{k_r+1} = \cdots = \beta_k = 0$ voidaan testata testisuureella

$$\frac{(\mathsf{R}^2 - \mathsf{R}_r^2)/d}{(1 - \mathsf{R}^2)/(n-k-1)} \sim F_{d,n-k-1}.$$

Testisuure vaatii sekä regression (7) että regression (12) laskemisen. Jälkimmäisen regression selitysastetta on merkitty yllä R_r^2:lla. Nollahypoteesin pätiessä testisuure noudattaa F-jakaumaa d:llä ja $n-k-1$:llä vapausasteella. Testisuureen suuret arvot ovat hälyttäviä.

Tämänkin testisuureen toimintaperiaate on hyvin ymmärrettävä. Mikäli kertoimet $\beta_{k_r+1}, \ldots, \beta_k$ poikkeavat tai osa niistä poikkeaa nollasta, mallien selitysasteiden tulisi erota selvästi. Tällöin erotus $\mathsf{R}^2 - \mathsf{R}_r^2$ testisuureen osoittajassa muodostuu suureksi ja testisuure samoin. Mikäli d. viimeisellä selittäjällä ei ole selitysvoimaa (nollahypoteesi pätee), erotus ja testisuure jäävät pieniksi.

Muunkinlaisia rajoituksia (esim. $\beta_1 = \beta_2$ tai $\beta_1 + \cdots + \beta_k = 1$) mallin (7) parametreille voidaan testata. Asia jätetään tässä maininnan varaan.

3.3 Empiirisiä esimerkkejä

3.3.1 Itsemurhat

Daly ym. (2011)[15] estimoivat PNS-menetelmällä yhtälön

[15] Mary C. Daly, Andrew J. Oswald, Daniel Wilson ja Stephen Wu (2011): Dark Contrasts: The Paradox of High Rates of Suicide in Happy Places. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 80, 435–442.

$$\begin{array}{rcccccc} y & = & 24{,}912 & + & 8{,}255x & + & \hat{\varepsilon}, \\ & & (2{,}311) & & (3{,}992) & & \end{array}$$

$$\mathsf{R}^2 = 0{,}248,\ n = 15.$$

Yllä y on itsemurhien lukumäärä 100 000 kansalaista kohti, x on kansakunnan onnellisuutta mittaava indeksi, $\hat{\varepsilon}$ on mallin residuaali, luvut suluissa ovat keskivirheitä ja n on havaintojen lukumäärä. Jäännösten ε oletetaan noudattavan normaalijakaumaa $\mathsf{N}(0, \sigma^2)$ ja olevan keskenään korreloimattomia. Kukin havaintopari (x_i, y_i) liittyy eurooppalaiseen valtioon ($i = 1, \ldots, 15$). Havainnot ja niihin sovitettu regressiosuora ovat oheisessa kuviossa.

Mallin mukaan

- itsemurhaintensiteetti (itsemurhien lukumäärä 100 000 kansalaista kohti) on 24,912 (estimoitu vakio), kun onnellisuusindeksi saa arvon 0.
- itsemurhaintensiteetti kasvaa onnellisuusindeksin kasvaessa. Kun jälkimmäinen suurenee yksiköllä, edellinen kasvaa $8,255$:llä (estimoitu kerroin onnellisuusindeksille).
- 24,8 prosenttia itsemurhaintensiteetin vaihtelusta selittyy onnellisuusindeksin vaihtelulla (selitysasteen R^2 suuruus).

Onnellisuusindeksi saa toiseksi ja itsemurhaintensiteetti suurimman arvon Suomen kohdalla. Suomessa tehdään itsemurhia vielä enemmän kuin malli ennustaa — eniten koko aineistossa.

Kuviossa raportoidun korrelaatiokertoimen 0,4975̇:n neliö on mallin selitysaste 0,248, koska mallissa on vain yksi selittäjä (kaava (5)).

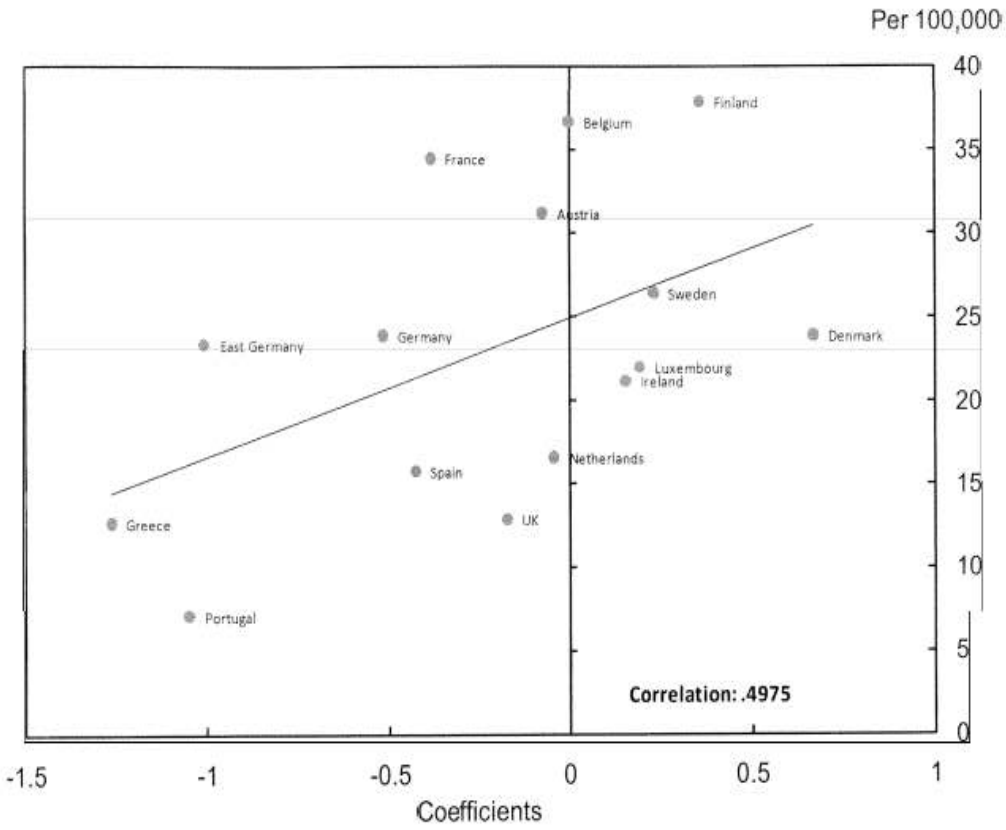
Koska jäännökset ε ovat normaalijakautuneita ja keskenään korreloimattomia, estimoidut kertoimet jaettuna keskivirheillään ovat t-jakautuneita. Koska mallissa on vain yksi selittäjä ja havaintoja on 15, on jakauma t_{15-1-1} eli t_{13} (kaava (6)). Testisuure on $8{,}255/3{,}992 \approx 2{,}068$. Jakauman t_{13} 97,5. persentiili on 2,160 (oheisesta taulukosta). Koska $|2{,}068| < |2{,}160|$, niin nollahypoteesi ei tule aivan hylätyksi 5 %:n riskitasolla kaksisuuntaisessa testauksessa. Onnellisuusindeksi ei ole tilastollisesti merkitsevä selittäjä eikä aineiston perusteella ole syytä luopua oletuksesta, että itsemurhaintensiteetti ja onnellisuusindeksi eivät korreloi.

Kuvion perusteella saattaisi veikata, että muuttujien välillä olisi todellinen yhteys. Selitys tilastolliselle merkitsettömyydelle saattaa olla aineiston pieni koko: Tilastollisesti merkitsevä positiivinen suhde itsemurhaintensiteetin ja osavaltioiden onnellisuusindeksien välillä pätee Yhdysvalloissa (mt.), ja osavaltioita on enemmän kuin eurooppalaisia valtioita regressiossa edellä. Mahdollisesti osavaltiot ovat myös homogeenisempia kuin eurooppalaiset valtiot, jolloin tutkittu suhde tulee selvemmin esiin osavaltioaineistossa (jäännös sisältää vähemmän vaihtelevia tekijöitä).

Kuva 8:

Figure 2. Unadjusted Suicide Rates vs. Adjusted Happiness Scores across European Countries

Unadjusted Suicide Rates per 100,000 (y-axis); Happiness Score Regression Coefficients (x-axis)



3.3.2 Siivoojien tuntipalkat

Keinänen ja Pakarinen (2009) tutkivat siivoojien tuntipalkkoja ja mahdollista palkkasyrjintää suomalaisessa siivousyrityksessä vuonna 2007.[16] He estimoivat vaihtoehtoisia malleja, jotka ovat kaikki palkkasyrjintää koskevalta tulokseltaan yhtäpitäviä. Yksi heidän (PNS-menetelmällä) estimoimistaan malleista on

$$\begin{array}{rcccccccccc} y & = & 8{,}430 & + & 0{,}114x_1 & - & 0{,}001x_2 & + & 0{,}169x_3 & + & 0{,}339x_4 & + & \hat{\varepsilon}. \\ & & (0{,}000) & & (0{,}840) & & (0{,}983) & & (0{,}747) & & (0{,}000) & & \end{array} \tag{13}$$

$$\mathsf{R}^2 = 0{,}256,\ F_{4,132} = 11{,}269,\ n = 137.$$

Yhtälössä y on tuntipalkka, x_1 on indeksi, joka saa arvon 1, kun siivooja on mies ja 0 muuten, x_2 on siivoojan ikä, x_3 on indikaattori työsuhteen laadulle, joka saa arvon 1, kun työsuhde on toistaiseksi voimassa oleva ja 0 muutoin[17] ja x_4 on työsuhteen kesto vuosina. Muut merkinnät (F-tunnusluvulla täydennettynä) ja oletukset ovat kuten edellisessä esimerkissä. Kukin havaintovektori $[x_{i1}\ \ldots\ x_{i4}\ y_i]$ liittyy yhteen siivojaan ($i = 1, \ldots, 137$).

Jäännöksen normaalisuusoletuksen perusteella testisuureet noudattavat t- ja F-jakaumia. Muuttujien selityskykyä yhdessä testaan F-testisuurella $F = 11{,}269$. Nollahypoteesin pätiessä se noudattaa jakaumaa $F_{4,132}$ (kaava (10)). Tätä jakaumaa ei ole taulukoitu oheisessa taulukossa, mutta jakauma $F_{4,100}$ on. Käytetään sitä vertailujakaumana. Sen 95. persentiili on 2,463.[18] Koska $11{,}269 > 2{,}463$, niin nollahypoteesi hylätään. Mallin selittäjillä on yhdessä selityskykyä.

Sukupuoli-indikaattorin t-arvo on $0{,}114/0{,}840 \approx 0{,}136$. Nollahypoteesin (kerroin on 0) pätiessä se noudattaa $t_{137-4-1}$ eli t_{132}-jakaumaa (kaava (11)). Oheisessa taulukossa ei ole taulukoitu t-jakaumaa 132 vapausasteella. Valitaan lähinnä taulukoitu vapausasteluku, joka on 100. Testisuuretta verrataan siis t_{100}-jakaumaan. Sen 95. persentiili on 1,660.[19] Koska $|0{,}136| < |1{,}660|$, niin nollahypoteesia ei hylätä 10 %:n riskitasolla. Aineiston mukaan ei ole syytä luopua oletuksesta, että miehet ja naiset saavat samaa palkkaa (kun muut palkkaan vaikuttavat tekijät on huomioitu) eli että palkkasyrjintää ei ole. Ikämuuttujan estimoitu kerroin on 0,001, ja sen t-arvo on $0{,}001/0{,}983 \approx 0{,}001$. Testisuureen arvon perusteella on selvää, että ikämuuttuja ei voi olla tilastollisesti merkitsevä selittäjä millään järkevällä riskitasolla. Aineiston mukaan ikä ei vaikuta siivojan palkkaan. Samoin voidaan päätellä, että työsuhteen laatu ei näytä olevan yhteydessä palkkaan ($0{,}169/0{,}747 \approx 0{,}226$). Työsuhteen kesto on tilastol-

[16] Anssi Keinänen ja Auri Pakarinen (2009): Palkkasyrjinnän todistaminen tilastollisesti. Edilex 2009/5 (www.edilex.fi/lakikirjasto/5798.pdf; viitattu 27.4.2011).

[17] Keinänen ja Pakarinen eivät selitä, miten tämä muuttuja on luotu. Selitys yllä on tämän tekstin kirjoittajan päättelemä. Keinänen ja Pakarinen eivät raportoi F-testisuuretta, mutta se on laskettavissa artikkelin tietojen perusteella.

[18] Monilla tilasto-ohjelmistoilla voitaisiin laskea $F_{4,132}$-jakauman tarkka 95. persentiili $(2, 440)$.

[19] Useista tilasto-ohjelmistoista saa 95. persentiilin $(1, 656)$ t_{132}-jakaumalle. Standardinormaalijakauman 95. persentiili on $1, 645$. Suurehkon havaintomäärän eli vapausasteiden suuruuden johdosta t- ja standardinormaalijakaumien persentiilit poikkeavat vain vähän toisistaan.

lisesti merkitsevä selittäjä palkalle: mallin raportointitarkkuuden yllä mukaan $0{,}339/0{,}000 \approx \infty$ (kertoimen estimaatin keskihajonta todellisuudessa on varmasti hieman nollaa suurempi).

Kokeilluista selittäjistä ainoastaan työsuhteen kesto näyttää olevan yhteydessä siivoojien palkkaan. Kukin työvuosi nostaa palkkaa 0,339 euroa.

Tutkimuksessa seuraava vaihe voisi olla estimoida malli, jossa ainoa selittäjä on työsuhteen kesto. Tällöin saataisiin luultavasti hieman eri ja hieman tarkempi estimaatti lisätyövuoden palkkaa nostavalle vaikutukselle. Tällaisen mallin vakio olisi palkka siivoojalle, joka on juuri aloittanut siivoojan työuransa.

Mallin (13) vakiolla ei ole järkevää tulkintaa. Kirjaimellisesti tulkiten se olisi palkka 0-vuotiaalle naissiivoojalle, jonka työsuhde on vakinainen mutta jonka työsuhde on vasta alkanut!