Ratkaisuehdotukset 9. laskuharjoituksiin.

1

Tarkastellaan mallia

$$y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t = \beta_1 z_t^{\beta_2} + u_t.$$

Matriisimuodossa malli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{u},$$

jossa $\mathbf{y}$ on $(n \times 1)$ vektori joka koostuu selitettävistä havainnoista, $\mathbf{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ $(n \times 1)$ on regressiofunktio, $\beta = [\beta_1\ \beta_2]'$ ja $\mathbf{u}$ $(n \times 1)$ sisältää virhetermit.

a)

$$\mathsf{SSR}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2})^2.$$

b) Derivoidaan SSR β_1:n ja β_2:n suhteen ja asetetaan derivaatat nolliksi:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \mathsf{SSR} = -2 \sum_{t=1}^{n} \left[(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) z_t^{\beta_2} \right] = 0$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial \beta_2} \mathsf{SSR} = -2 \sum_{t=1}^{n} \left[(y_t - \beta_1 z_t^{\beta_2}) \beta_1 z_t^{\beta_2} \log z_t \right] = 0.$$

(Derivointi kuten HT 8.3:ssa.)

c)

$$\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} y_1 - \beta_1 z_1^{\beta_2} \\ \vdots \\ y_n - \beta_1 z_n^{\beta_2} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_t^{\beta_2} & \beta_1 z_t^{\beta_2} \log z_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^{\beta_2} & \beta_1 z_1^{\beta_2} \log z_1 \\ \vdots & \vdots \\ z_n^{\beta_2} & \beta_1 z_n^{\beta_2} \log z_n \end{bmatrix}.$$

d)

$$\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'\left[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right] = \begin{bmatrix} z_1^{\hat{\beta}_2} & \dots & z_n^{\hat{\beta}_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\beta}_1 z_1^{\hat{\beta}_2}\log z_1 & \dots & \hat{\beta}_1 z_n^{\hat{\beta}_2}\log z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \hat{\beta}_1 z_1^{\hat{\beta}_2} \\ \vdots \\ y_n - \hat{\beta}_1 z_n^{\hat{\beta}_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n \left(y_t z_t^{\hat{\beta}_2} - \hat{\beta}_1 z_t^{2\hat{\beta}_2}\right) \\ \sum_{t=1}^n \left(y_t \hat{\beta}_1 z_t^{\hat{\beta}_2}\log z_t - \hat{\beta}_1^2 z_t^{2\hat{\beta}_2}\log z_t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä on kirjan HT 6.6.

2

a)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma/x_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen PNS riittää. Selitettävä on y_t, ja selittäjät ovat 1, x_t ja $1/x_t$.

b)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + x_t/\gamma + u_t$$

Ei. Parametrit eivät identifioidu PNS-estimoinnissa. Selittäjä x_t ilmenee kahdesti: parametrien β ja $1/\gamma$ kanssa. Summa $\beta + 1/\gamma$ voidaan estimoida yhtäpitävästä mallista

$$y_t = \alpha + (\beta + 1/\gamma)x_t + u_t,$$

mutta β:aa ja $1/\gamma$.aa ei voi erikseen estimoida. Kirjan sivun 219 välttämätön ehto identifioituvuudelle (ei ole olemassa $\boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_0$ joilla $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_1) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_0)$) ei selvästikään toteudu.

Lisäpohdintaa: Tavalliseen PNS:ään liittyvän selittäjämatriisin $\mathbf{X}$ t. rivi on $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & x_t & x_t \end{bmatrix}$, joten selittäjämatriisi ei ole täysiasteinen. Epälineaariseen PNS:ään liittyvän derivaattamatriisin $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ t. rivi on $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & x_t & -\gamma^{-2}x_t \end{bmatrix}$. (Edellä $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \gamma \end{bmatrix}'$.) Derivaattamatriisin kolmas sarake on toisen sarakkeen kerrannainen, joten derivaattamatriisi ei ole täysiasteinen.

c)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + z_t/\gamma + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa.Tavallinen PNS riittää. Selittäjiä ovat 1, x_t ja z_t. Niitä vastaavat parametrit ovat α, β ja $1/\gamma$.

d)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + z_t/\beta + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Malli on kohdan c) epälineaarisesti rajoitettu versio, joten täytyy käyttää epälineaarista PNS:ää.

e)

$$y_t = \alpha + \beta x_t z_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen PNS riittää. Selittäjät ovat 1 ja $x_t z_t$. Niitä vastaavat parametrit ovat α ja β.

f)

$$y_t = \alpha + \beta\gamma x_t z_t + \gamma z_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen PNS riittää. Selittäjät ovat 1, $x_t z_t$ ja z_t. Niitä vastaavat parametrit ovat α, $\beta\gamma$ ja γ. Estimaatti β:lle saadaan jakamalla $\beta\gamma$:n estimaatti γ:n estimaatilla.

g)

$$y_t = \alpha + \beta\gamma x_t + \gamma z_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen PNS riittää.Selittäjät ovat 1, x_t ja z_t. Niitä vastaavat parametrit ovat α, $\beta\gamma$ ja γ. Estimaatti β:lle saadaan jakamalla $\beta\gamma$:n estimaatti γ:n estimaatilla.

h)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \beta x_t^2 + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen (rajoitettu) PNS riittää. Selittäjät ovat 1 ja $x_t + x_t^2$ ja niitä vastaavat parametrit ovat α ja β.

i)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma x_t^2 + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen PNS riittää. Selittäjät ovat 1, x_t ja x_t^2 ja niitä vastaavat parametrit ovat α, β ja γ.

j)

$$y_t = \alpha + \beta\gamma x_t^3 + u_t$$

Ei. Parametrit eivät identifioidu PNS-estimoinnissa. Tulo $\beta\gamma$ voidaan estimoida, mutta β:aa tai γ:aa ei voida estimoida erikseen. Kirjan sivun 219 välttämätön ehto identifioituvuudelle (ei ole olemassa $\boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_0$ joilla $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_1) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_0)$) ei selvästikään toteudu.

Lisäpohdintaa: Derivaattamatriisin $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ t. rivi on $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma x_t^3 & \beta x_t^3 \end{bmatrix}$. (Edellä $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \gamma \end{bmatrix}'$.) Derivaattamatriisin kolmas sarake on toisen sarakkeen kerrannainen, joten derivaattamatriisi ei ole täysiasteinen.

k)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + (1 - \beta) z_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen (rajoitettu) PNS riittää. Selitettävä on $y_t - z_t$ ja selittäjät ovat 1 ja $x_t - z_t$. (Vrt.HT 6.4.)

l)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + (\gamma - \beta) z_t + u_t$$

Kyllä. Parametrit identifioituvat PNS-estimoinnissa. Tavallinen (rajoitettu) PNS riittää. Selittäjät ovat 1, $x_t - z_t$ ja z_t.

Tehtävä on kirjan HT 6.7.

3

a)

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &\equiv y_t - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= [x_t(\boldsymbol{\beta}_0) + u_t] - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= x_t(\boldsymbol{\beta}_0) - x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + u_t.\end{aligned}$$

Muodostetaan funktion $x_t(\boldsymbol{\beta})$ toisen asteen Taylor-kehitelmä $\boldsymbol{\beta}_0$:n ympäristössä:

$$x_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \approx x_t(\boldsymbol{\beta}_0) + \mathbf{X}_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0).$$

Sijoittamalla kehitelmä $\hat{u}_t$:n kaavaan saadaan

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &\approx x_t(\boldsymbol{\beta}_0) - x_t(\boldsymbol{\beta}_0) - \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + u_t \\ &= u_t - \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0).\end{aligned}$$

b) Tehtävänannon mukaan $\mathbf{b} = n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) \overset{a}{\equiv} \mathsf{plim}\left(n^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\right)^{-1} n^{-1/2}\mathbf{X}_0'\mathbf{u}$.[1] Tätä määritelmää hyväksikäyttäen a)-kohdan tulos voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{u}_t \approx u_t - n^{-1/2}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} - \frac{1}{2}n^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}.$$

Residuaalineliösumma $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ koostuu kuudesta termistä:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= \sum_{t=1}^{n}\left[u_t - n^{-1/2}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} - \frac{1}{2}n^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}\right]^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n}\big[u_t^2 - 2u_t n^{-1/2}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} - u_t n^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} + n^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} \\ &\qquad + \frac{1}{2}n^{-3/2}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} + \frac{1}{4}n^{-2}\left(\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}\right)^2\big].\end{aligned}$$

Ensimmäinen termi on

$$\sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \mathbf{u}'\mathbf{u}.$$

Toinen termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$-2n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} u_t\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} = -2n^{-1/2}\mathbf{u}'\mathbf{X}_0\mathbf{b},$$

[1] Kyseessä on kirjan sivun 225 kaava (6.30). Kirjan sivulla 222 on perusteltu momenttimenetelmä (MM) -estimaattorin asymptoottinen normaalisuus ja sivulla 223 optimaalisilla valinnoilla sen asymptoottinen tehokkuus. Epälineaarisen PNS-estimaattorin asymptoottinen jakauma on sivun 225 mukaan sama kuin asymptoottisesti optimaalisen MM-estimaattorin. Siitä seuraa, että PNS-estimaattori on asymptoottisesti tehokas ja normaalijakautunut kaavan (6.30) mukaisesti.

jossa matriisin $\mathbf{X}_0$ t. rivi on $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)$. Tehtävänannon perusteella tämä lauseke konvergoi kohti satunnaismuuttujaa

$$\begin{aligned}
&-2n^{-1/2}\mathbf{u}'\mathbf{X}_0\left(n^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}\right)^{-1}n^{-1/2}\mathbf{X}_0'\mathbf{u} \\
&= -2\mathbf{u}'\mathbf{X}_0\left(\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\right)^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{u} \\
&\equiv -2\mathbf{u}\mathbf{P}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Epälineaarisen regressiomallin tilanteessa regressiofunktioiden $x_t(\boldsymbol{\beta}_0)$ ajatellaan olevan ennaltamääräytyneitä jäännösten u_t suhteen ($\mathsf{E}(u_t|\Omega_t) = 0$ kirjan merkinnöin). Tällöin myös regressiofunktioiden 1. ja 2. derivaatat ovat ennaltamääräytyneitä jäännösten suhteen (HT 8.4), joten $\mathsf{E}[u_t\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)] = \mathbf{0}_{k\times k}$. Näin ollen suurten lukujen lain perusteella kolmas termi konvergoi stokastisesti nollaan:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} = \mathbf{b}'[n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)]\mathbf{b} \xrightarrow{p} 0.$$

Neljäs termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{n}\mathbf{b}'\sum_{t_1}^{n}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b} = \frac{1}{n}\mathbf{b}'\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\mathbf{b}.$$

Tehtävänannon perusteella tämä neliömuoto on asymptoottisesti jakautunut samoin kuin neliömuoto

$$\frac{1}{n}\mathbf{u}'\mathbf{X}_0 n^{-1/2}\left(n^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\right)^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\left(n^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0\right)^{-1}n^{-1/2}\mathbf{X}_0'\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{P}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u}.$$

Viides termi konvergoi kohti nollaa. Tämä nähdään kirjoittamalla termi muodossa

$$n^{-1/2}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2}\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b}.$$

Suurten lukujen lain mukaan termissä oleva keskiarvo konvergoi stokastisesti kohti kiinteää raja-arvoa. Kokonaisuudessaan termi konvergoi stokastisesti kohti nollaa $n^{-1/2}$:lla kertomisen takia.

Vastaavasti myös kuudes termi

$$-\frac{1}{n}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{4}(\mathbf{b}'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)\mathbf{b})$$

konvergoi stokastisesti nollaan suurten lukujen lain perusteella. Keskiarvo tulee yllä jaetuksi n:llä, mikä takaa konvergenssin.

Yhdistämällä yllä johdetut tulokset (ensimmäisen, toisen ja neljännen termin) nähdään, että

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &\overset{a}{=} \mathbf{u}'\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{P}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u} + \mathbf{u}'\mathbf{P}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u} \\
&= \mathbf{u}'\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$:n ja $\mathbf{u}'\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{u}$:n erotus häviää asymptoottisesti.

Muuta: Lopputulos yllä tulee 1. asteen Taylor-kehitelmän

$$\hat{u}_t \approx u_t + \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$

komponenteista. Miksi piti laskea 2. asteen Taylor-kehitelmä? Vaikka ero residuaalin $\hat{u}_t$:n ja sen approksimaation $u_t + \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$.n välillä on "pieni", ei ole selvää, että erotus äärettömän pitkästä neliösummasta residuaaleista ja niiden approksimaatioista on pieni. Laskemalla 2. asteen kehitelmä ja osoittamalla, että muut komponentit häviävät asymptoottisesti, varmistutaan että lopputulos yllä pätee.

4

Derivoidaan jäännösneliösumma ja asetetaan derivaatat nollaksi:

$$\frac{\partial \mathsf{SSR}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n}[y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})]^2}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = 2\sum_{t=1}^{n}[y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})]\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = 2[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}_{1\times k}.$$

Jakamalla yhtälöt 2:lla ja transponoimalla saadaan kysytty tulos

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}_{k\times 1}.$$