Harjoitusten 8 ratkaisuehdotukset

1.

a) "Pähkinänkuorivastaus": Prosessi on

$$y_t = \beta t^{-1} + u_t,$$

jossa $u_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2)$ ja $t = 1, 2, \ldots$. PNS-estimaattori β:lle on ("$\sum x_i y_i / \sum x_i^2 = \beta + \sum x_i u_i / \sum x_i^2$")

$$\hat{\beta} = \beta + (\sum_{t=1}^{T} t^{-2})^{-1} \sum_{t=1}^{T} t^{-1} u_t.$$

Suluissa oleva termi on deterministinen ja suppenee vihjeen mukaan $\pi^2/6$:teen. Jälkimmäisellä termillä ($\sum_{t=1}^{n} t^{-1} u_t$) on selvästikin positiivinen varianssi kaikilla t:n arvoilla. Näin ollen $\hat{\beta}$:lla on myös positiivinen varianssi kaikilla t:n arvoilla.

Yksityiskohtaisempi vastaus (Juho Nyholm): Kirjoitetaan tehtävänannon regressio matriisimuodossa

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2 \mathbf{I_n})$$

jossa $\mathbf{y}$ $(n \times 1)$ ja $\mathbf{u}$ $(n \times 1)$ ovat ilmeisiä ja selittäjämatriisi $\mathbf{X}$ $(n \times 1)$ on

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}.$$

Parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}$ $(k \times 1)$ PNS-estimaatti on nyt

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \left(\sum_{t=1}^{n} t^{-2} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \frac{u_t}{t},
\end{aligned}$$

jossa $\boldsymbol{\beta}_0$ on mallin todellinen parametrivektori. Koska selittäjät ovat deterministisiä, on $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ harhaton. Sen sijaan sen varianssi ei ole nolla edes asymptoottisesti:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \mathsf{Var}\left[\left(\sum_{t=1}^{n} t^{-2} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \frac{u_t}{t} \right] = \left(\sum_{t=1}^{n} t^{-2} \right)^{-2} \mathsf{E}\left[\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{u_t}{t} \right)^2 \right] \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^{n} t^{-2} \right)^{-2} \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^2}.
\end{aligned}$$

Tehtävänannon vihjeitä käyttäen saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2 \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{6\sigma^2}{\pi^2} \neq 0.$$

PNS-estimaattorilla $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ on positiivinen varianssi asymptoottisesti, joten $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ei ole $\boldsymbol{\beta}_0$:n tarkentuva estimaattori.

b) Kirjoitetaan tehtävänannon regressio matriisimuodossa:

$$y_t = \mathbf{W_t}\boldsymbol{\beta} + u_t = \begin{bmatrix} 1 & 1/t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + u_t$$

eli

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}.$$

Yllä

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \end{bmatrix}.$$

Selvästikin

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{W}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2/2 \\ \vdots \\ \beta_1 + \beta_2/n \end{bmatrix}.$$

Jotta parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ olisi asymptoottisesti identifioituva, tulisi yhtälöillä

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{W}' \left[\mathbf{y} - \mathbf{x}('\boldsymbol{\beta})\right] = \mathbf{0}$$

olla yksikäsitteinen ratkaisu (kirjan s. 217). Lasketaan $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta})$ tehtävän tilanteessa:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) &= \operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} n^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \beta_1 - \beta_2 \\ y_2 - \beta_1 - \beta_2/2 \\ \vdots \\ y_n - \beta_1 - \beta_2/n \end{bmatrix} \\
&= \operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} n^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n (y_t - \beta_1 - \beta_2/t) \\ \sum_{t=1}^n t^{-1} (y_t - \beta_1 - \beta_2/t) \end{bmatrix} \\
&\overset{y_t=\beta_1^0+\beta_2^0/t+u_t}{=} \operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} n^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n \left(\beta_1^0 + \beta_2^0/t - \beta_1 - \beta_2/t + u_t\right) \\ \sum_{t=1}^n t^{-1} \left(\beta_1^0 + \beta_2^0/t - \beta_1 - \beta_2/t + u_t\right) \end{bmatrix} \\
&= \operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} \begin{bmatrix} \beta_1^0 - \beta_1 + (\beta_2^0 - \beta_2) n^{-1} \sum_{t=1}^n t^{-1} + n^{-1} \sum_{t_1}^n u_t \\ (\beta_1^0 - \beta_1) n^{-1} \sum_{t=1}^n t^{-1} + (\beta_2^0 - \beta_2) n^{-1} \sum_{t=1}^n t^{-2} + n^{-1} \sum_{t=1}^n u_t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_1^0 - \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa tehtävänannon vihjeistä ja SLL:ista: $\operatorname*{\mathsf{plim}}_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n u_t = \mathsf{E}(u_t) = 0$.

Huomataan, että ei ole olemassa yksikäsitteisestä vektoria $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1\ \beta_2]$, joka toteuttaisi ehdon $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$: Ehto toteutuu valitsemalla $\beta_1 = \beta_1^0$ ja mikä tahansa β_2:n arvo. Näin ollen $\boldsymbol{\beta}$ ei ole asymptoottisesti identifioituva PNS-estimoinnissa.

PNS-estimaattori ei ole tarkentuva, koska se ei ole asymptoottisesti identifioituva. Asymptoottinen identifioituvuus on välttämätön ehto tarkentuvuudelle (kirjan s. 219).

Ylimääräinen huomio: David Hendry (1995) tarkastelee samantapaista mallia kirjassaan *Dynamic Econometrics* (s:t 720–2).

2. Kutsutaan Gauss–Markov -estimaattoreiksi estimaattoreita $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$, jotka toteuttavat tehtävänannon ehdot $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Ay}$ ja $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$. Eksogeenisuusoletuksen voimassa ollessa ehto $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ takaa estimaattoriluokkaan kuuluvien estimaattorien harhattomuuden.

Tehtävän momenttimenetelmä (MM) -estimaattori

$$(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y} \tag{3.70}$$

on muotoa $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Ay}$, kun valitaan $\mathbf{A} = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'$. Valinta toteuttaa myös ehdon $\mathbf{AX} = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X} = \mathbf{I}_{k\times k}$. Näin ollen MM-estimaattori (3.70) on Gauss–Markov -estimaattori.

Toisaalta Gauss-Markov -estimaattori toteuttaa yhtälöt

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Ay} = \mathbf{I} \times \mathbf{Ay} \overset{\mathbf{AX=I}}{=} \mathbf{AXAy} \overset{\mathbf{AX=I}}{=} (\mathbf{AX})^{-1}\mathbf{Ay}.$$

Merkitsemällä $\mathbf{A} = \mathbf{W}'$ huomataan, että Gauss-Markov -estimaattorit ovat MM-estimaattoreita:

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}.$$

Näin ollen tehtävän oletusten mukaiset MM-estimaattorit ovat Gauss–Markov -estimaattoreita ja päinvastoin.

Tehtävä on Davidsonin ja MacKinnonin (2004) kirjan HT 3.17.

3. Yleinen muoto $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})$:lle on

$$\underset{1\times k}{\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})} = \underset{1\times k}{\frac{\partial x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'}} = \underset{1\times k}{[\frac{\partial x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} \cdots \frac{\partial x_t(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k}]}.$$

Kun malli on

$$y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t = \beta_1 + \beta_2 z_{1t} + \beta_3 z_{t2}^{\beta_4} + u_t,$$

niin $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})$ on

$$\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = [1 \quad z_{1t} \quad z_{2t}^{\beta_4} \quad \beta_3 z_{2t}^{\beta_4}\log(z_{t2})\ ].$$

Viimeinen elementti seuraa derivointisäännöstä

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\exp(\log a^x) = \frac{d}{dx}\exp(x \log a) = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a.$$

4.

Tehtävänannon mukaan Ω sisältää kaikki deterministiset funktiot muuttujista X_i $(i = 1, \ldots, k)$. Merkitään Ω^*:llä informaatiojoukkoa, joka sisältää muuttujat X_i. Näillä merkinnöillä

$$\mathsf{E}[Y|\Omega^*] = h(X_1, \ldots, X_k).$$

Iteroitujen odotusarvojen säännön mukaan

$$\mathsf{E}[Y|\Omega] = \mathsf{E}[\mathsf{E}(Y|\Omega^*)|\Omega] = \mathsf{E}[h(X_1, \ldots, X_k)|\Omega] = h(X_1, \ldots, X_k).$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että h on muuttujien X_i deterministinen funktio ja siitä, että sen on kuuluttava informaatiojoukkoon Ω.

Tehtävä on Davidsonin ja MacKinnonin (2004) kirjan HT 6.1.

5.

a) Derivoidaan jäännösneliösumma ja asetetaan derivaatat nollaksi:

$$\frac{\partial \mathsf{SSR}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \frac{\partial \sum_{t=1}^{n}[y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})]^2}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = 2\sum_{t=1}^{n}[y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})]\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = 2[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}_{1\times k}$$

Jakamalla yhtälöt 2:lla ja transponoimalla saadaan kysytty tulos

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}_{k\times 1}.$$

b) Jos malli on lineaarinen parametrien suhteen, voidaan yhtälöt $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$ $(n \times 1)$ kirjoittaa muodossa $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, jossa $\mathbf{X}$ $(n \times k)$ sisältää selittäjät ja $\boldsymbol{\beta}$ $(k \times 1)$ nitä vastaavat parametrit. Tunnettuja derivointisääntöjä käyttäen saadaan laskettua

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{X}.$$

Sijoittamalla nämä tehtävänannon normaaliyhtälöihin saadaan kysytty muoto:

$$\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}_{k\times 1}.$$