Ratkaisuehdotukset 7. laskuharoituksiin.

7.1

a) Huomataan ensin, että $\mathbf{M}_\iota$:n idempotenttiuden perusteella R^2_c:n kaavassa olevan osamäärän osoittaja ja nimittäjä ovat tehtävän tilanteessa

$$\mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^* = \mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}$$

ja

$$\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^* = \mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} = \mathbf{M}_\iota\mathbf{y}.$$

Vektorin $\mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}$ pituuden neliö on

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2 &= \|(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2 \\
&= \{(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} \\
&\overset{\text{symm.}}{=} \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}) \\
&\overset{\text{idemp.}}{=} \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}^2_\mathsf{c} &\equiv 1 - \frac{\|\mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^*\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^*\|^2} \\
&= 1 - \frac{\|\mathbf{M}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\text{yltä}}{=} 1 - \frac{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^*\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}^*\|^2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{\mathbf{M_2X_1}} = \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1[(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1]^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1 \overset{\mathbf{X}_2\mathbf{M}_2=\mathbf{0}}{=} \mathbf{0}_{n\times n},$$

jossa jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa kirjan sivulta 58.

c) Yleisesti pätee

$$\mathbf{M}_\iota \mathbf{y} = \mathbf{y} - \iota \bar{y},$$

jossa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i$. Oletuksen mukaan $\mathbf{y}$ on kuitenkin keskistetty, joten $\bar{y} = 0$ ja

$$\mathbf{M}_\iota \mathbf{y} = \mathbf{y}.$$

d) Olkoon $\mathbf{y}'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k}$. Tällöin

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}\mathbf{y} = \mathbf{M}_2\mathbf{X}_1[(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1]^{-1}(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)'\mathbf{y} \overset{\mathbf{y}'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1=\mathbf{0}}{=} \mathbf{0}_{n\times 1}.$$

e) Jos $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k1}$, niin

$$\mathbf{P}_1\mathbf{y} = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y} \overset{\mathbf{y}'\mathbf{X}_1=\mathbf{0}}{=} \mathbf{0}_{n\times 1}.$$

Koska $\mathbf{y}$ on keskistetty, pätee

$$\mathsf{R}^2_{\mathsf{c}}(\mathbf{X}_1) \overset{\text{HT 3.3}}{=} \frac{\|\mathbf{P}_1\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \overset{\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}=\mathbf{y}}{=} \frac{\|\mathbf{P}_1\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} = \mathbf{0}_{n\times 1}.$$

f) Jos $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat ortogonaalisia, niin $\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}_{k_1\times k_2}$. Tällöin

$$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 = (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1')\mathbf{X}_2 \overset{\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2=0}{=} \mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2' \overset{\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2=\mathbf{0}}{=} \mathbf{0}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} &= \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1 \\
&= (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_1)\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_1) \\
&\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{0}}{=} \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2' \\
&\overset{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2=\mathbf{X}_2}{=} \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2') \\
&= \mathbf{P}_2.
\end{aligned}$$

Yllä kolmas yhtäsuuruus seuraa $\mathbf{X}_1$:n ja $\mathbf{X}_2$:n ortogonaalisuudesta, jolloin

$$\mathbf{P}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}.$$

7.2

HT 7.1 a):n mukaan regression (1) selitysaste $\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X})$ voidaan laskea kaavalla

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{P}_\mathbf{X}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}$$

(muuttujat ovat keskistettyjä mutta merkintöjen yksinkertaistamiseksi keskistämistä ei merkitä "*":llä). Yllä olevan ja HT 5.4:n perusteella ($\mathbf{P}_\mathbf{X} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}$) pätee:

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{P}_\mathbf{X}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} = \frac{\|(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}. \tag{R}$$

a) Olkoon $\mathbf{y}'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k}$ (vihje). Tällöin HT 7.1:n d)-kohdan mukaan

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}\mathbf{y} = \mathbf{0}_{n\times 1}.$$

Oletuksen perusteella $\mathbf{y}$ on keskistetty, joten (HT 7.1 c))

$$\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} = \mathbf{y}.$$

Edellisten tulosten perusteella

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) &\overset{(R)}{=} \frac{\|(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}=\mathbf{y}}{=} \frac{\|(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}\mathbf{y}=\mathbf{0}}{=} \frac{\|\mathbf{P}_2\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}=\mathbf{y}}{=} \frac{\|\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2).
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) - \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2) = 0 \le \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1)$$

eli

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) - \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1) \le \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2).$$

Epäyhtälö pätee yllä, jos $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{0}_{1\times k_1}$ eli jos $\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1) > 0$.$\square$

b) Olkoot $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{X}_1$ ortogonaalisia eli $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k_1}$ (vihje). Tällöin $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1} = \mathbf{0}_{n\times n}$ (HT 7.1 b)) ja

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) - \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2) &\overset{\text{(R)}}{=} \frac{\|(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} - \frac{\|\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} - (\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}=\mathbf{0}}{=} \frac{(\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} - (\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} + (\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y} - (\mathbf{M}_\iota\mathbf{y})'\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2} \\
&= \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Yllä epäyhtälö pätee, jos $(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)'\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_{k_1\times 1}$ eli jos $\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1) > 0$.[1]

HT 7.1:n e)-kohdan mukaan $\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1) = 0$, jos $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k_1}$. Kokoamalla tulokset saadaan

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) - \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2) > 0 = \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1)$$

eli

$$\mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}) - \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_1) > \mathsf{R}_\mathsf{c}^2(\mathbf{X}_2),$$

jos $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k_1}$ ja $(\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)'\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_{k_1\times 1}$.$\square$

c) Olkoot $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ortogonaalisia eli $\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}_{k_1\times k_2}$ (vihje). Tällöin HT 7.1:n f)-kohdan mukaan

$$\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2 \overset{\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2=0}{=} \mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} \overset{\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2=\mathbf{0}}{=} \mathbf{P}_2$$

ja

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}_{n\times n}.$$

[1] Yhtäsuuruus $(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1})(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}) = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}$ seuraa vaihtoehtoisesti siitä, että $\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1} = \mathbf{P}_\mathbf{X}$ (HT 5.4) ja siitä, että $\mathbf{P}_\mathbf{X}$ on idempotentti.

Saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_{\mathsf{c}}^2(\mathbf{X}) &\overset{\text{(R)}}{=} \frac{\|(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{M_1 X_2}})\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}=\mathbf{P}_2}{=} \frac{\|(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{M}_\iota \mathbf{y})'(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=0}{=} \frac{(\mathbf{M}_\iota \mathbf{y})'(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{(\mathbf{M}_\iota \mathbf{y})'\mathbf{P}_1\mathbf{M}_\iota \mathbf{y} + (\mathbf{M}_\iota \mathbf{y})'\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{P}_1\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\| + \|\mathbf{P}_2\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2} \\
&= \mathsf{R}_{\mathsf{c}}^2(\mathbf{X}_1) + \mathsf{R}_{\mathsf{c}}^2(\mathbf{X}_2).
\end{aligned}
$$

Väite c) pätee siis silloin, kun $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat ortogonaalisia (ja $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{y}'\mathbf{X}_2 \neq \mathbf{0}$).[2]$\Box$

Tilanteiden $\mathbf{y}'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k}$, $\mathbf{y}'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{1\times k_1}$ ja $\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}_{k_1\times k_2}$ tulkintaa:

a) Selitettävä on ortogonaalinen ”residuaalien”$\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1$ kanssa. Tällöin selitettävä ei korreloi muuttujien $\mathbf{X}_1$ sen ”osan”kanssa, jota muuttujat $\mathbf{X}_2$ eivät selitä. (Vrt.: Kahden muuttujan välinen korrelaatio poikkeaa nollasta, mutta niiden ehdollinen korrelaatio on nolla.)

b) Selitettävä on ortogonaalinen muuttujien $\mathbf{X}_1$ kanssa mutta korreloi muuttujien $\mathbf{X}_1$ sen ”osan”kanssa, jota muuttujat $\mathbf{X}_2$ eivät selitä. (Vrt.: Kahden muuttujan välinen korrelaatio on nolla, mutta niiden ehdollinen korrelaatio poikkeaa nollasta.)

c) Selittäjät matriiseissa $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat ortogonaalisia.

Johtopäätös: $\mathsf{R}_{\mathsf{c}}^2(\mathbf{X}_1)$:n suuruudesta tai pienuudesta ei voi päätellä, onko $\mathbf{X}_1$ kattavassa mallissa (1) oleellinen tai epäoleellinen selittäjä!

Muuta: Tilanteiden a), b) ja c) tehdyt oletukset eivät käytännössä päde eksaktisti, mutta likimain ne voivat pitää. Tehtävä antaa osviittaa, miten selitysasteet tällöin käyttäytyvät.

[2] Yhtäsuuruus $(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ seuraa vaihtoehtoisesti siitä, että tehtävän tilanteessa $(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ (HT 5.4) ja siitä, että $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ on idempotentti.

7.3

a) PNS-estimaatti $\hat{\beta}$:lle mallista (1) on $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Mallissa (2) selittäjä mat riisina on $\mathbf{X}^* = \mathbf{XA}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}\hat{\beta}.\end{aligned}$$

b) Projektiomatriisit ovat identtisiä (kirjan s. 11):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{XA}} &= \mathbf{XA}(\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{XA})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{XAA}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{X}}.\end{aligned}$$

Molemmat mallit tuottavat siten samat sovitteet eli $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{y}$:n $\mathbf{y}$-vektorille. Näin ollen myös estimoidut jäännökset ja jäännösvarianssi (s^2) ovat samat malleille.

c) Mallien selitettävät ja jäännökset ovat b)-kohdan perusteella identtiset. R_c^2 on kirjan kaavan (1.09) mukaan $1 - \|\mathbf{M}_\mathbf{X}\mathbf{y}\|^2 / \|\mathbf{M}_\iota\mathbf{y}\|^2$ eli $1-$ *jäännösneliösumma*/(*keskistetyn y:n neliösumma*). Kaavaan sijoitettavat suu reet ovat samat malleissa (1) ja (2), joten R_c^2:t ovat samat.

d) Kovarianssimatriisi $\hat{\beta}$:lle on

$$\mathsf{cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Kovarianssimatriisi $\hat{\beta}^*$:lle on

$$\begin{aligned}\mathsf{cov}(\hat{\beta}^*) &= \sigma^2(\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{XA})^{-1} \\ &= \sigma^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}')^{-1} \\ &= \sigma^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})'.\end{aligned}$$

Näiden otosvastineet ovat $s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ja $s^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})'$. (Estimaatti s^2 on malleille sama b)-kohdan perusteella.)

e) $\hat{\beta}^*$:n yksittäisen elementin t-arvo on $t_{\beta_i^*=0} = \hat{\beta}_i^* / \mathsf{SE}(\hat{\beta}_i^*)$ (SE viittaa "standard error'iin"). Johdetaan sille esitysmuoto, joka riippuu $\hat{\beta}$:sta. Lasketaan ensin $\hat{\beta}_i^*$:n varianssin estimaatti:

$$
\begin{aligned}
[\mathsf{SE}(\hat{\beta}_i^*)]^2 &= [s^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})']_{ii} \\
&= \mathbf{e}_i' s^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{e}_i \\
&= s^2\mathbf{e}_i'\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{e}_i'\mathbf{A}_i^{-1})' \\
&= s^2\mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}_i^{-1})'.
\end{aligned}
$$

Yllä $[\cdot]_{ii}$ poimii argumenttina olevan matriisin i:nnen diagonaalialkion, $\mathbf{e}_i = [0\dots0 \quad 1 \quad 0\dots0]'$, jossa "1" on i. termi ($i = 1, \dots k$) ja $\mathbf{A}_i^{-1}$ on $\mathbf{A}^{-1}$:n i. vaakarivi. Ylläolevan ja a)-kohdan perusteella

$$
\begin{aligned}
t_{\beta_i^*=0} &= \frac{\hat{\beta}_i^*}{\mathsf{SE}(\hat{\beta}_i^*)} \\
&= \frac{\mathbf{A}_i^{-1}\hat{\beta}}{s\{\mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}_i^{-1})'\}^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Jälkimmäisellä rivillä osoittajassa on lineaarikombinaatio $\hat{\beta}$:n alkioista.

f) Sijoitetaan $\mathbf{A} = \lceil a_1 \dots a_k \rfloor$ kohdan a) vastaukseen:

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}^* &= \mathbf{A}^{-1}\hat{\beta} \\
&\overset{\mathbf{A}=\lceil a_1\dots a_k \rfloor}{=} \lceil a_1^{-1}\dots a_k^{-1} \rfloor \hat{\beta} \\
&= \left[a_1^{-1}\hat{\beta}_1 \dots a_k^{-1}\hat{\beta}_k\right]'.
\end{aligned}
$$

$\hat{\beta}^*$:n alkiot ovat siis $\hat{\beta}$:n alkiot jaettuna vastaavan muuttujan skaalauskertoimella.

Estimoitujen kertoimien t-arvot eivät muutu: Matriisin $\mathbf{A}^{-1}$ i. vaakarivi on nyt $\mathbf{A}_i^{-1} = [0\dots0 \quad a_i^{-1} \quad 0\dots]$, jossa a_i^{-1} on i. alkio. Tehtävän tilanteessa

$$
\begin{aligned}
t_{\beta_i^*=0} &\overset{\text{e)}}{=} \frac{\mathbf{A}_i^{-1}\hat{\beta}}{s\{\mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}_i^{-1})'\}^{1/2}} \\
&\overset{\mathbf{A}=\lceil a_1\dots a_k \rfloor}{=} \frac{[0\dots0 \quad a_i^{-1} \quad 0\dots]\hat{\beta}}{s\{[0\dots0 \quad a_i^{-1} \quad 0\dots](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}[0\dots0 \quad a_i^{-1} \quad 0\dots]'\}^{1/2}} \\
&= \frac{a_i^{-1}\hat{\beta}_i}{s\{a_i^{-2}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]_{ii}\}^{1/2}} \\
&= \frac{\hat{\beta}_i}{s\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]_{ii}\}^{1/2}}. \\
&= t_{\beta_i=0}.
\end{aligned}
$$

Tämä on t-arvo mallista (1) laskettuna $\hat{\beta}$:n i:nnelle alkiolle.