Ratkaisuehdotukset 5. laskuharjoituksiin.

1.

a) Yhtälö pätee, jos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{I}.$$

Osoitetaan, että yo. yhtälö pätee:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \qquad (*) \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}+\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C} \end{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} [-\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} \quad \mathbf{I}] \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} [-\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} \quad \mathbf{I}] \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Valitaan a)-kohdan kaavassa (1) $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2$ ja $\mathbf{C} = \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2$. Nähdään heti, että kaava pätee, jos $(\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$. Osoitetaan, että niin on:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} &= [\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2]^{-1} \\
&= \{\mathbf{X}_2'[\mathbf{I} - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1']\mathbf{X}_2\}^{-1} \\
&= (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

2.

a) Todistus on suoraviivainen HT 5.1 b) kohdan avulla:

$$\mathbf{P_x} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \mathbf{X}_2' \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1' + (-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \left[-\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1' + \mathbf{X}_2' \right] \\
&= \mathbf{P}_1 + (-\mathbf{P}_1 + \mathbf{I})\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'(-\mathbf{P}_1 + \mathbf{I}) \\
&= \mathbf{P}_1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1)\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}[(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1)\mathbf{X}_2]' \\
&= \mathbf{P}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2[(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)]^{-1}[\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2]' \\
&= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}.
\end{aligned}$$

Kaava

$$\mathbf{P_X} = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}$$

seuraa, kun $\mathbf{X}_1$:n ja $\mathbf{X}_2$:n sarakkeet tai sarakkeiden merkinnät vaihdetaan keskenään edellisissä todistuksissa.

Davidson ja MacKinnon esittävät vaihtoehtoisen todistuksen (kirjan HT 2.19).

b) Hajotelman $\mathbf{P_X} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ tulkinta: $\mathbf{P_X y}$ on PNS-sovite $\mathbf{y}$:lle, kun selittäjämatriisi on $\mathbf{X}$ (kaikki selittäjät). Hajotelman mukaan $\mathbf{P_X y}$ voidaan esittää summana kahdesta muusta PNS-sovitteesta $\mathbf{y}$:lle. Toisessa on ollut selittäjämatriisina $\mathbf{X}_1$ ja toisessa $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$. Jälkimmäisen sarakkeet ovat residuaalit regressioista, joissa on selitetty $\mathbf{X}_2$:n sarakkeita $\mathbf{X}_1$:llä. Summa on ortogonaalinen: $\mathbf{P_X y}$ eli $\mathbf{y}$:n projektio $\mathbf{X}$:lle on summa $\mathbf{y}$:n projektiosta $\mathbf{X}_1$:lle ja $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$:lle. Näiden matriisien sarakkeiden virittämät avaruudet ovat ortogonaalisia, joten projektio $\mathbf{P_X y}$ esitetään hajotelmassa kahden ortogonaalisen projektion summana.

Tulkinta HT 3.5:n kuvion geometrian puitteissa: Kuvioon on piirretty vektorit $\mathbf{P_X y}$ ja $\mathbf{P}_1\mathbf{y}$. Hajotelman mukaan $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}$ on vektori CB. Selvästikin kuviossa pätee, että $\mathbf{P_X y} = \mathbf{P}_1\mathbf{y} + CB$, joten kuvion mukaan $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}$ on CB.

Formaalisti: Koska $\mathbf{P}_1\mathbf{P_X y} = \mathbf{P}_1\mathbf{y}$, niin $\mathbf{P}_1\mathbf{y}$ on on $\mathbf{P_X y}$:n projektio (kuviossa) vektorille $\mathbf{X}_1$. Näin ollen CB on $\mathbf{M}_1\mathbf{P_X y}$ kuten kuvioon 1.7 c) on merkitty. Laskemalla nähdään edelleen, että $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y} = \mathbf{M}_1\mathbf{P_X y} = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\beta}_2$. Lasku alkaa huomaamalla, että matriisitulon $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$ ensimmäinen matriisi on

$\mathbf{M}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y} &\overset{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_1}{=} \mathbf{M}_1\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y} \\
&\overset{\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1=\mathbf{0}}{=} \mathbf{M}_1(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2})\mathbf{y} \\
&\overset{\text{a) eli (4.36)}}{=} \mathbf{M}_1\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{y} \\
&= \mathbf{M}_1(\mathbf{X}_1\overset{\wedge}{\beta}_1+\mathbf{X}_2\overset{\wedge}{\beta}_2) \\
&\overset{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_1=\mathbf{0}}{=} \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\overset{\wedge}{\beta}_2.
\end{aligned}$$

Tulkinta kuvion 1.7 b) avulla: $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}$ on $\mathbf{y}$:n projektio $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$:lle. $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$:n ja $\mathbf{X}_1$:n virittämät avaruudet ovat kohtisuorassa, joten $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ (ei piirretty kuvioon) on yhdensuuntainen vektorin CB kanssa ja $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}\mathbf{y}=\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\overset{\wedge}{\beta}_2$.

3.

a) Muodostetaan matriisitulo

$$\mathbf{B}'\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{12} \\ b_{11}b_{12} & b_{12}^2+b_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Matriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen ja siinä on kolme "vapaata" termiä (a_{11}, a_{21} ja a_{22}), joista diagonaalitermien tulee olla positiivisia ($a_{11}>0$ ja $a_{22}>0$). Matriisitulo $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ on symmetrinen ja sen diagonaalitermit ovat positiivisia ($b_{11}^2>0$ ja $b_{12}^2+b_{22}^2>0$). Asetetaan $b_{11}^2=a_{11}$ eli $b_{11}=\sqrt{a_{11}}$ ($a_{11}>0$), $b_{11}b_{12}=a_{12}$ eli $b_{12}=a_{12}/b_{11}=a_{12}/\sqrt{a_{11}}$ ja $b_{12}^2+b_{22}^2=a_{22}$ eli $b_{22}=\sqrt{a_{22}-b_{12}^2}=\sqrt{a_{22}-(a_{12}/\sqrt{a_{11}})^2}=\sqrt{a_{22}-a_{12}^2/a_{11}}$. Vihjeen $\mathsf{Var}(Y)\geq[\mathsf{Cov}(X,Y)]^2/\mathsf{Var}(X)$ mukaan $a_{22}-a_{21}^2/a_{11}\geq 0$, joten kaikki asetukset ovat mielekkäitä. Näin ollen hajotelma $\mathbf{A}=\mathbf{B}'\mathbf{B}$ voidaan muodostaa 2×2 -matriisille.$\square$

b) Väite: On olemassa matriisi $\mathbf{B}_n$ siten, että

$$\mathbf{B}_n'\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}' & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}' & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1}'\mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' & a_{nn} \end{bmatrix},$$

jossa $a_{nn}>0$ ($n>2$).

Todistus: Lasketaan kyseinen matriisitulo:

$$\mathbf{B}_n'\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}' & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}' & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1}'\mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1}'\mathbf{b} \\ \mathbf{b}'\mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{b}'\mathbf{b}+b_{nn}^2 \end{bmatrix}.$$

Oletuksen mukaan $\mathbf{B}_{n-1}'$ on täysiasteinen alakolmiomatriisi, joten sillä on käänteismatriisi $(\mathbf{B}_{n-1}')^{-1}$. Asetetaan $\mathbf{B}_{n-1}'\mathbf{b}=\mathbf{a}$ eli $\mathbf{b}=(\mathbf{B}_{n-1}')^{-1}\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}'\mathbf{b}+b_{nn}^2=a_{nn}$. Mikäli $a_{nn}>\mathbf{b}'\mathbf{b}$, niin b_{nn} voidaan aina valita siten, että viimeinenkin yhtäsuuruus toteutuu.

Todistetaan, että epäyhtälö $a_{nn}>\mathbf{b}'\mathbf{b}$ pätee: HT:n 5.1 a)-kohdan mukaan matriisin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

käänteismatriisin kaakkoisalkio on $(\mathbf{C}-\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$. Näin ollen matriisin

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' & a_{nn} \end{bmatrix}$$

käänteismatriin kaakkoisalkio on

$$a_{nn} - \mathbf{a}'\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{a}.$$

Sijoitetaan yllä olevaan lausekkeeseen tehdyt oletukset ja asetukset:

$$\begin{aligned} a_{nn} - \mathbf{a}'\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{a} &= a_{nn} - (\mathbf{B}_{n-1}^{'}\mathbf{b})'(\mathbf{B}_{n-1}^{'}\mathbf{B}_{n-1})^{-1}\mathbf{B}_{n-1}^{'}\mathbf{b} \\ &= a_{nn} - \mathbf{b}'\mathbf{B}_{n-1}\mathbf{B}_{n-1}^{-1}(\mathbf{B}_{n-1}^{'})^{-1}\mathbf{B}_{n-1}^{'}\mathbf{b} \\ &= a_{nn} - \mathbf{b}'\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Koska matriisi $\mathbf{A}_n$ on positiivisesti definiitti, niin niin on myös matriisi $\mathbf{A}_n^{-1}$ (2004 kirjan HT 3.7; todetaan myös 2004-kirjan s:lla 99; Lineaarisen mallin kurssin 2009 HT 2.3).[1] Posiitivisesti definiitin matrisiin diagonaalialkiot ovat positiivisia (todistus on 2004-kirjan s:lla 99). Näin ollen matriisin $\mathbf{A}_n^{-1}$ alin diagonaalialkio on positiivinen eli $a_{nn} - \mathbf{b}'\mathbf{b} > 0$. Epäyhtälö $a_{nn} > \mathbf{b}'\mathbf{b}$ on todistettu.

Todetaan lisäksi, että $\mathbf{b}'\mathbf{b} + b_{nn}^2 > 0$ (summataan neliöityjä alkioita).[2] Vaaditunlainen hajotelma pätee $n \times n$ -matriisille, jos se pätee $(n-1) \times (n-1)$ -matriisille.

Kohdasta a), todistuksesta yllä ja induktioperiaatteesta seuraa, että hajotelma $\mathbf{A}_n = \mathbf{B}_n'\mathbf{B}_n$ on aina muodostettavissa ($n \geq 2$).$\square$

Todistus on mukaelma todistuksesta kirjassa G.A.F. Seber (1974): Linear Regression Analysis (s. 388).

---

[1] Olkoon $\mathbf{D}$ symmetrinen ja pos.def. ja $\mathbf{E}$ täyttä sarakeastetta. Tällöin $\mathbf{E}'\mathbf{D}\mathbf{E}$ on pos.def. (2004-kirjan s. 99). Valitaan $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$. Saadaan, että $(\mathbf{D}^{-1})'\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} \overset{\text{symm.}}{=} \mathbf{D}^{-1}$ on pos.def.

[2] Vaihtoehtoinen perustelu: Sisätulossa $\mathbf{b}'\mathbf{b} = \mathbf{a}'[(\mathbf{B}_{n-1}^{'})^{-1}]'(\mathbf{B}_{n-1}^{'})^{-1}\mathbf{a}$ matriisitulo keskellä on positiivisesti definiitti matriisi (koska on muotoa $\mathbf{C}'\mathbf{C}$, jossa matriisi $\mathbf{C}$ on täysiasteinen; 2004-kirjan s. 99).

4.

a) Perustelu vihjeen väitteelle $\lambda_i > 0$: Positiivisesti definiitin (pos. def.) matriisin ominaisarvot ovat positiivisia. (Kirjan s. 547; Timo Patovaaran opetusmoniste Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille s. 25.)

Selvästikin pätee

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \mathbf{\Lambda},$$

jossa $\mathbf{\Lambda}^{1/2} \equiv \left\lceil \lambda_1^{1/2} \ldots \lambda_n^{1/2} \right\rfloor$. Vihjeestä, yo. yhtäsuuruudesta ja matriisin $\mathbf{S}$ sarakkeiden ortogonaalisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S\Lambda S}'. \\ &= \mathbf{S\Lambda}^{1/2}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}' \\ &= \mathbf{S\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}' \times \mathbf{S\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}'. \end{aligned}$$

Määrittelemällä

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{S\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}'$$

toteutuu kysytty matriisien yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{RR} \\ &= \mathbf{R}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Perustellaan vihje1:n kohdat:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= (\mathbf{S\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}')^{-1} \\ &= (\mathbf{S}')^{-1}(\mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1}(\mathbf{S})^{-1}. \end{aligned}$$

Ortogonaalisen matriisin käänteismatriisi on sen transpoosi (esim. Davidsonin ja MacKinnonin (2004) kirjan s. 548). Selvästikin $(\mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1} = \left\lceil \lambda_1^{-1/2} \ldots \lambda_n^{-1/2} \right\rfloor \equiv \mathbf{\Lambda}^{-1/2}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= (\mathbf{S}')^{-1}(\mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1}(\mathbf{S})^{-1} \\ &= \mathbf{S\Lambda}^{-1/2}\mathbf{S}'. \end{aligned}$$

Selvästikin $\mathbf{R}^{-1}$ on symmetrinen matriisi eli $(\mathbf{R}^{-1})' = \mathbf{R}^{-1}$.

Kertomalla yhtälö (1) molemmilta puolilta $\mathbf{R}^{-1}$:llä saadaan vihje1:n viimeinen yhtäsuuruus

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}. \tag{2}$$

Perustellaan vihje2:n väite $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$: Matriisi $\mathbf{R}^{-1}$ on täysiasteinen $n \times n$ -matriisi, joten mikä tahansa $n \times 1$ -vektori — mukaan lukien tehtävän $\mathbf{x}$-vektori — voidaan esittää matriisin $\mathbf{R}^{-1}$ sarakkeiden lineaarikombinaationa. Näin ollen valitsemalla $\mathbf{z}$-vektorin komponentit (koordinaatit) sopivasti saadaan yhtäsuuruus $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$.

Esitetään neliömuoto $\mathbf{x}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}$ yhtäsuuruuden $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$ avulla (vihje2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} &\overset{\mathbf{R}^{-1}\text{:n symm.}}{=} \mathbf{z}'\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{R}^{-\mathbf{1}}\mathbf{z} \\
&= \mathbf{z}'(\mathbf{R}^{-2}-\mathbf{R}^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-\mathbf{1}})\mathbf{z} \\
&\overset{(1)\&(2)}{=} \mathbf{z}'(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{I})\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

Yhtälöstä nähdään, että jos matriisi $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ on pos. def., niin myös matriisi $\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{I}$ on pos. def.□

c) Koska erotus $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ on pos. def. matriisi, niin vihjeen perusteella myös matriisi

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{R}^{-1} &= \mathbf{R}^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-\mathbf{1}}-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \\
&\overset{(2)}{=} \mathbf{I}-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}
\end{aligned}$$

on pos. def. Kohdasta b) seuraa, että myös matriisi

$$\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}-\mathbf{I}$$

on pos. def. Kerrotaan yllä oleva matriisi molemmilta puolilta $\mathbf{R}^{-1}$:llä:

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}-\mathbf{I})\mathbf{R}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-\mathbf{1}}-\mathbf{R}^{-2} \overset{(\mathbf{1})}{=} \mathbf{B}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}.$$

Vihjeen ja $\mathbf{R}^{-1}$:n symmetrisyyden perusteella kertominen $\mathbf{R}^{-1}$:llä molemmilta puolilta ei muuta matriisin definiittisyyden lajia. Näin ollen matriisin $\mathbf{B}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}$ definiittisyyden laji on sama kuin matriisin $\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}-\mathbf{I}$ eli molemmat ovat pos. def:ejä. Näin ollen jos matriisi $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ on pos. def, niin myös matriisi $\mathbf{B}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}$ on pos. def.□

Tehtävä on oleellisesti Davidsonin ja MacKinnonin (2004) kirjan HT 3.8.