Harjoitusten 3 ratkaisuehdotukset

1.

i) Regressiot ovat mahdollisia, mikäli selittävät eivät ole lineaarisesti toisistaan riippuvia, jolloin matriisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ on täysiasteinen ja kääntyvä. Selittäjät ovat lineaarisesti riippuvia ainoastaan 3. regressiossa. Tällöin matriisi $\mathbf{X}$ $(n \times 3)$ olisi

$$[\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3],$$

ja matriisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ (3×3) olisi

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2' \\ \mathbf{x}_3' \\ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)' \end{bmatrix} [\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3] \\
= &\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2'(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \\ \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3'(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \\ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_2 & (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_3 & (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3'\mathbf{x}_3 \\ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_2 & (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_3 & (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)'\mathbf{x}_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matriisin $\mathbf{X}$ kolmas sarake on kahden ensimmäisen sarakkeen erotus. Matriisin $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ kolmas sarake on kahden ensimmäisen sarakkeen summa. Molemmat matriisit ovat vajaa-asteisia. Mallin (1) oletus täysiasteisesta $\mathbf{X}$-matriisista ja siten kääntyvästä $\mathbf{X}'\mathbf{X}$-matriisista (luennon todistus) eivät siten täyty eikä regressio (1) ole laskettavissa.

ii) 1., 2., 4., 7. ja 10. regressio tuottavat samat sovitteet ja residuaalit kuin tehtävässä ensin mainittu regressio. Perustelu: Näissä tilanteissa selittäjät virittävät saman sarakeavaruuden $\mathsf{S}(\mathbf{X})$. Tällaiset regressiot tuottavat samat sovitteet ja residuaalit (kirjan s. 61). Näihin malleihin eli selittäjien muunnoksiin liittyvät (ei-singulaariset) $\mathbf{A}$-matriisit ovat

- 1. regressio:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
- 2. regressio:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- 4. regressio:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

- 7. regressio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

- 10. regressio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3937 \end{bmatrix}.$$

5. ja 6. regressiossa selittäjä kuuluu $\mathsf{S}(\mathbf{X})$:ään muttei yksin riitä virittämään sitä. Tällöin residuaalivektori on pidempi (tai vähintään yhtä pitkä) kuin alkuperäisessä regressiossa ja myös sovitevektori poikkeaa (ylipäänsä) alkuperäisestä.

8. regressiossa selittäjät virittävät $\mathsf{S}(\mathbf{X})$:n mutta interaktiotermin $(x_{t2}x_{t3})$ takia selittäjien virittämä avaruus on dimensioltaan suurempi kuin $\mathsf{S}(\mathbf{X})$. Tällöin residuaalivektori on lyhyempi (tai vähintään yhtä lyhyt) kuin alkuperäisessä regressiossa ja sovitevektori poikkeaa (ylipäänsä) alkuperäisestä.

9. regressiossa selittäjät eivät viritä $\mathsf{S}(\mathbf{X})$:ää, joten residuaalivektori ja sovitevektori poikkeavat alkuperäisestä. (Selittäjät virittävät tason R^n:ssä mutta eri tason kuin $\mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_3$.)

2. Vastaukset oleellisesti löytyvät, kun sijoittaa $\mathbf{XA}$:n $\mathbf{X}$:n paikalle PNS-regressioon liittyvissä kaavoissa.

a) PNS-estimaatti $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:lle mallista (1) on $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Mallissa (2) selittäjä matriisina on $\mathbf{X}^* = \mathbf{XA}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^* &= (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{XA})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Koska

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}' \\ \mathbf{0}_{(k-1)\times 1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{bmatrix}$$

(aputulos), niin

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}' \\ \mathbf{0}_{(k-1)\times 1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Yhtälön mukaan $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1 - \mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ ($\boldsymbol{\beta}' = [\beta_1 \; \boldsymbol{\beta}_2']$ ilmeisin merkinnöin) ja $\hat{\beta}_i^* = \hat{\beta}_i$, $i = 2, \ldots, k$.

b) Projektiomatriisit ovat identtisiä:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P_{XA}} &= \mathbf{XA}(\mathbf{A'X'XA})^{-1}\mathbf{A'X'} \\
&= \mathbf{XAA}^{-1}(\mathbf{X'X})^{-1}(\mathbf{A'})^{-1}\mathbf{A'X'} \\
&= \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'} \\
&= \mathbf{P_X}.
\end{aligned}$$

Molemmat mallit tuottavat siten samat sovitteet eli $\mathbf{P_X y}$:n $\mathbf{y}$-vektorille. Näin ollen myös estimoidut jäännökset ja jäännösvarianssi (s^2) ovat samat malleille.

c) Mallien selitettävät ja jäännökset ovat b)-kohdan perusteella identtiset. R^2_c on kirjan kaavan (1.09) mukaan $1 - \|\mathbf{M_X y}\|^2 \,/\, \|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2$ eli $1-$ *jäännösneliösumma*/(*keskistetyn y:n neliösumma*). Kaavaan sijoitettavat suureet ovat samat malleissa (1) ja (2), joten R^2_c:t ovat samat.

d) Päätellään samalla tavalla kuin kohdissa a)–c), että R^2_c:t ovat samat.

Projektiomatriisi $\mathbf{P_X}$ on tietenkin sama malleille (1) ja (3). Jäännösneliösumma on mallille (1)

$$\mathbf{y'M_x y}$$

ja mallille (3)

$$(c\mathbf{y})'\mathbf{M_x}(c\mathbf{y}) = \mathbf{c}^2\mathbf{y'M_x y}.$$

Selitettävän muuttujan jäännösvarianssi regressiossa vakion suhteen mallissa (1) on

$$\mathbf{y'M}_\iota\mathbf{y}$$

ja mallissa (3)

$$(c\mathbf{y})'\mathbf{M}_\iota(c\mathbf{y}) = \mathbf{c}^2\mathbf{y'M}_\iota\mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{M}_\iota = \mathbf{I} - n^{-1}\boldsymbol{\iota\iota}'$ (kirjan s. 15). Lasketaan R^2_c molemmille malleille (kirjan kaava (2.55)):

$$\mathsf{R}^2_\mathsf{c}(1) = 1 - \frac{\mathbf{y'M_x y}}{\mathbf{y'M}_\iota\mathbf{y}} = 1 - \frac{\mathbf{c}^2\mathbf{y'M_x y}}{\mathbf{c}^2\mathbf{y'M}_\iota\mathbf{y}} = \mathsf{R}^2_\mathsf{c}(3)$$

(mallin numero on suluissa). Selitysosuudet ovat malleissa samat.

3.

a) Koska mallissa on vakio, niin $\mathbf{M_x P}_\iota = \mathbf{0}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\mathbf{M_X y} &\overset{\mathbf{M_x P}_\iota = \mathbf{0}}{=} \mathbf{M_X}(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_\iota)\mathbf{y} \\
&= \mathbf{M_X M}_\iota \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Vektorin $\mathbf{M_X M_\iota y}$ pituuden neliö on

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{M_X M_\iota y}\|^2 &= \|(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X})\mathbf{M_\iota y}\|^2 \\
&= \{(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X})\mathbf{M_\iota y}\}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X})\mathbf{M_\iota y} \\
&\overset{\text{symm.}}{=} \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X})(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X})\mathbf{M_\iota y}) \\
&\overset{\text{idemp.\&}\mathbf{P_x}=\mathbf{P_x P_x}}{=} \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota(\mathbf{I}_n - \mathbf{P_X P_x})\mathbf{M_\iota y} \\
&= \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota\mathbf{M_\iota y} - \mathbf{y}'\mathbf{M}_\iota\mathbf{P_X P_x M_\iota y} \\
&= \|\mathbf{M_\iota y}\|^2 - \|\mathbf{P_x M_\iota y}\|^2 .
\end{aligned}$$

Saadaan

$$1 - \frac{\|\mathbf{M_X y}\|^2}{\|\mathbf{M_\iota y}\|^2} = 1 - \frac{\|\mathbf{M_X M_\iota y}\|^2}{\|\mathbf{M_\iota y}\|^2} = 1 - \frac{\|\mathbf{M_\iota y}\|^2 - \|\mathbf{P_X M_\iota y}\|^2}{\|\mathbf{M_\iota y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{P_X M_\iota y}\|^2}{\|\mathbf{M_\iota y}\|^2}.$$

b) Vektori $\boldsymbol{\iota}$ voi kuulua $\mathsf{S}(\mathbf{X})$:ään, vaikka mallissa ei olisi vakiota. Riittää, että on olemassa lineaarikombinaation matriisin $\mathbf{X}$ sarakkeista, joka tuottaa vektorin $\boldsymbol{\iota}$. (Kirjan sivulla 70 on esimerkki.)

4.

a) Regressiossa (1') selitettävänä on $\mathbf{y}$ ja selittäjinä vakio ja $\mathbf{X}$-matriisin muuttujat. Regressiossa (1*) selitettävänä on $\mathbf{y}$:n poikkeamat keskiarvostaan ja selittäjinä $\mathbf{X}$-matriisin muuttujien poikkeamat keskiarvoistaan. Tässä regressiossa ei ole vakiota. ($\mathbf{M}_\iota = \mathbf{I}_n - n^{-1}\boldsymbol{\iota\iota}'$ (kirjan s. 63), joten esim. $\mathbf{M_\iota y} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$.)

Jos $\mathsf{S}(\mathbf{X})$ sisältäisi vakiovektorin regressiossa (1'), niin $\boldsymbol{\iota}$:sta ja $\mathbf{X}$:stä muodostettava selittäjämatriisi olisi vajaa-asteinen matriisi: Yksi sen sarakkeista ($\boldsymbol{\iota}$) olisi lineaarikombinaatio $\mathbf{X}$:n sarakkeista.

Jos $\mathsf{S}(\mathbf{X})$ sisältäisi vakiovektorin regressiossa (1*), niin selittäjämatriisi $\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}$ olisi vajaa-asteinen. Esimerkiksi jos jokin $\mathbf{X}$:n sarake olisi vakiovektori, niin $\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}$:n vastaava sarake olisi nollavektori. Vaikka jokin $\mathbf{X}$:n sarake ei olisi vakiovektori, niin selittäjämatriisi olisi silti vajaa-asteinen: Regressio (1*) on yhtä pitävä regression

$$\mathbf{M_\iota y} = \mathbf{M}_\iota\mathbf{XAA}^{-1}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_1^*$$

kanssa, kun $\mathbf{A}$ on ei-singulaarinen $k \times k$ -matriisi (kirjan s. 61). $\mathbf{A}$ voidaan aina valita siten, että yksi $\mathbf{XA}$:n sarakkeista on vakiovektori. Tällöin $\mathbf{M}_\iota\mathbf{XA}$:n yksi sarake on nollavektori ja $\mathbf{M}_\iota\mathbf{XA}$ on vajaa-asteinen ja siten myös $\mathbf{M}_\iota\mathbf{X}$.

b) Lasketaan FWL-lauseen avulla $\boldsymbol{\beta}$:n PNS-estimaatti regressiosta (1'). Sijoitetaan kirjan kaavaan (2.41) "$\mathbf{X}_1$:n" paikalle "$\boldsymbol{\iota}$" ja "$\mathbf{X}_2$:n" paikalle "$\mathbf{X}$":

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{M}_\iota\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{M_\iota y}.$$

Lasketaan $\boldsymbol{\beta}$:n PNS-estimaatti regressiosta (1*) "tavallisella" kaavalla:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \{(\mathbf{M}_\iota \mathbf{X})'\mathbf{M}_\iota \mathbf{X})\}^{-1}(\mathbf{M}_\iota \mathbf{X})'\mathbf{M}_\iota \mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{M}_\iota \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}.$$

Estimaatit ovat samat.

c) FWL-lauseen mukaan residuaalit ovat samat regressioissa (1´) ja (1*). (Regressio (1') vastaa kirjan kaavaa (2.33) ja regressio (1*) kirjan kaavaa (2.40).)

d) Residuaalit — ja siten niiden neliösumma — ovat samoja kohdan c) mukaan. Selitettävät eivät ole regressioissa samoja, mutta keskistetyt selitettävät ovat: Regression (1') keskistetty **y**-vektori on

$$\mathbf{M}_\iota \mathbf{y},$$

ja regression (1*) keskistetty **y**-vektori on

$$\mathbf{M}_\iota(\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}) = \mathbf{M}_\iota \mathbf{y}.$$

Regressioiden keskistetyt selitettävät — ja siten niiden neliösummat — ovat samoja. Näin ollen selitysasteet R_c^2:t $(= 1 - \|\mathbf{M}_\mathbf{X}\mathbf{y}\|^2 / \|\mathbf{M}_\iota \mathbf{y}\|^2)$ ovat regressioissa (1') ja (1*) samat.

5.

a) Frisch–Waugh–Lovell-lauseen mukaan sama PNS-estimaatti $\boldsymbol{\beta}_2$:lle ja jäännösvektori saadaan regressioista

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}_1 \tag{1}$$

ja

$$\mathbf{M}_1\mathbf{y} = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}_2. \tag{2}$$

Jälkimmäisessä regressiossa selitettävänä on residuaalit regressiosta, jossa **y**:tä on selitetty $\mathbf{X}_1$:llä ja selittäjinä ovat residuaalit regressioista, joissa on selitetty $\mathbf{X}_2$:n sarakkeita $\mathbf{X}_1$:llä.

b) Vektorien tulkinta kuviossa (a): OA on selitettävä muuttuja regressiossa (1). OB ja BA ovat sovite- ja residuaalivektorit regressiosta (1). OC ja CA ovat sovite- ja residuaalivektorit regressiosta

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u}_3. \tag{3}$$

CB voidaan tulkita esimerkiksi residuaalivektorina regressiosta

$$\mathbf{P}_\mathbf{X}\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u}_4. \tag{4}$$

Yllä selitettävä on sovite regressiosta (1). Oleellisempi tulkinta CB:lle on alla.

c) Vektorien tulkinta kuviossa (b) (lintuperspektiivi kuvioon (a)): OB on sovite regressiosta (1). Sovite on OE:n eli $\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$:n ja OD:n eli $\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$:n summa.

OC on sovitevektori sekä regressiosta (3) että (4). CB on $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ eli residuaalivektori regressiosta, jossa $\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$:ta (kuvion tilanteessa vektori) on selitetty $\mathbf{X}_1$:llä (kaava (5) alla).

d) Vektorien tulkinta ja yhteys Frisch–Waugh–Lovell-lauseeseen kuviossa (c): CA eli $\mathbf{M}_1\mathbf{y}$ on selitettävä FWL-regressiossa (2). CB on edellisen kohdan perusteella $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ eli sovite FWL-regressiossa (2). BA eli $\mathbf{M}_x\mathbf{y}$ on residuaalivektori tästä regressiosta.

Lisätulkintaa: FWL-regressiossa (2) $\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{M}_x\mathbf{y}$. Vektori $\mathbf{y}$ on

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_x\mathbf{y}.$$

Huomataan, että

$$\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_1)\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2. \tag{5}$$

Sijoitetaan se edelliseen kaavaan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \\
&= \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \\
&\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1}{=} \mathbf{P}_1(\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) + \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \\
&\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1}{=} \mathbf{P}_1(\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) + \mathbf{M}_1(\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \\
&= \mathbf{P}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y} + \mathbf{M}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y} + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \\
&\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_x=\mathbf{P}_1}{=} \mathbf{P}_1\mathbf{y} + \mathbf{M}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y} + \mathbf{M}_x\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Tämä on yhtäpitävää yhtälön

$$\mathbf{M}_1\mathbf{y} = \mathbf{M}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y} + \mathbf{M}_x\mathbf{y} \tag{6}$$

kanssa. Yhtälön (6) kolmen vektorin välinen suhde on esitetty kuviossa 1.7 c). FWL-regression (2) selitettävä muuttuja on yhtälössä (6) vasemmalla puolella. FWL-regression (2) selittäjämatriisi kerrottuna oikealta $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$:lla on $\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{M}_1(\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \mathbf{M}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y}$. Se sekä residuaalit $\mathbf{M}_x\mathbf{y}$ ovat yhtälössä (6) oikealla puolella. Yhtälö (6) on siten sama kuin FWL-regressio (2) $\boldsymbol{\beta}_2$:n arvolla $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$. Koska kyseessä on regressio, ovat vektorit $\mathbf{M}_1\mathbf{P}_x\mathbf{y}$ ja $\mathbf{M}_x\mathbf{y}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan, mitä kuvio 1.7 c) havainnollistaa.

Kirjan sivuilla 142–143 osoitetaan, että F-testi kaikkien selittäjien (pl. vakio) tarpeellisuudelle mallissa perustuu vektorien CB ja BA suhteeseen.