Ratkaisuehdotukset 12. harjoituksiin

1.

a) Osoitetaan, että $\mathbf{\Omega}(\rho)\mathbf{\Omega}^{-1}(\rho)$ on identiteettimatriisi:

$$\mathbf{\Omega}(\rho)\mathbf{\Omega}^{-1}(\rho) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 1 & \rho \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times\sigma_\varepsilon^{-2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\rho & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\begin{matrix} 1-\rho^2 & -\rho+(\rho+\rho^3)-\rho^3 & -\rho^2+(\rho^2+\rho^4)-\rho^4 & \cdots \\ \rho-\rho & -\rho^2+1+\rho^2-\rho^2 & -\rho+(\rho+\rho^3)-\rho^3 & \cdots \\ \rho^2-\rho^2 & -\rho^3+(\rho+\rho^3)-\rho & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ & & & \ddots \\ \rho^{n-1}-\rho^{n-1} & -\rho^n+(\rho^{n-2}+\rho^n)-\rho^{n-2} & & \cdots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \cdots & & -\rho^{n-1}+\rho^{n-1} \\ \cdots & & -\rho^{n-2}+\rho^{n-2} \\ \ddots & & \\ \ddots & & \vdots \\ \ddots & -\rho^2+1+\rho^2-\rho^2 & -\rho+\rho \\ \cdots & -\rho^3+\rho+\rho^3-\rho & -\rho^2+1 \end{matrix}\right]$$

$$= \mathbf{I}_n.$$

b) Osoitetaan, että $\sigma_\varepsilon^{-1}\mathbf{\Psi}(\rho)\mathbf{\Psi}(\rho)'\sigma_\varepsilon^{-1} = \mathbf{\Omega}^{-1}(\rho)$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\varepsilon^{-1}\mathbf{\Psi}(\rho)\mathbf{\Psi}(\rho)'\sigma_\varepsilon^{-1} \\
&= \sigma_\varepsilon^{-2}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\rho \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix} \\
&= \sigma_\varepsilon^{-2}\begin{bmatrix} 1-\rho^2+\rho^2 & -\rho & 0 & & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\rho & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix} \\
&= \sigma_\varepsilon^{-2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\rho & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{a)}}{=} \mathbf{\Omega}^{-1}(\rho).
\end{aligned}
$$

2. Väite on, että regressiot

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{X}\mathbf{b} + b_\rho \widetilde{\mathbf{u}}_1 + \text{residuaalivektori} \tag{7.43}$$

ja

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + b_\rho \widetilde{\mathbf{u}}_1 + \text{residuaalivektori.} \tag{7.44}$$

tuottavat samat t-testisuureet b_ρ:lle. Frisch–Waugh–Lovell -lauseen mukaan yllä olevat regressiot tuottavat samat PNS-estimaattorit ja residuaalit kuin yllä olevat regressiot kerrottuna vasemmalta matriisilla $\mathbf{M_X} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$:

$$\widetilde{\mathbf{u}} = b_\rho \mathbf{M_x} \widetilde{\mathbf{u}}_1 + \text{residuaalivektori} \tag{7.43*}$$

ja

$$\widetilde{\mathbf{u}} = b_\rho \mathbf{M_x} \widetilde{\mathbf{u}}_1 + \text{residuaalivektori.} \tag{7.44*}$$

Yllä on käytetty tuloksia $\mathbf{M_x}\widetilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{M_x}\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{M_x}\mathbf{M_x}\mathbf{y} = \mathbf{M_x}\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{u}}$; $\widetilde{\mathbf{u}}$ on jo valmiiksi $\mathsf{S}^\perp(\mathbf{X})$:ssä), $\mathbf{M_x}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{M_x}\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{u}}$ (kirjan s:t 58–59). Regressiot (7.43*) ja (7.44*) ovat identtiset. Näin ollen regressioiden (7.43) ja (7.44) PNS-estimaatit b_ρ:lle ja residuaalit ja siten residuaalineliösummat ovat samat. Koska regressioissa (7.43) ja (7.44) on samat selittäjät, niin niistä lasketut t-arvot b_ρ:lle

$$\frac{\hat{b}_\rho}{\sqrt{s^2\{([\mathbf{X}\ \widetilde{\mathbf{u}}_1]'[\mathbf{X}\ \widetilde{\mathbf{u}}_1])^{-1}\}_{k+1,k+1}}}$$

(ilmeisin merkinnöin) ovat myös samat.

3. Tehtävän matriisi on (symmetrinen täysiasteinen) positiivisesti definiitti $(k+1)\times(k+1)$ -kovarianssimatriisi. Positiivisesti definiitti $(k+1)\times(k+1)$ -matriisi voidaan aina esittää muodossa $\mathbf{B}'\mathbf{B}$, jossa matriisi $\mathbf{B}$ on täysiasteinen $(k+1)\times(k+1)$ -matriisi (kirjan s:t 99–100). Koska positiivisesti definiitin matriisin käänteismatriisi on myös positiivisesti definiitti (kirjan s. 99), niin käänteismatriisikin voidaan esittää vastaavassa muodossa.

Tehtävän (posiitiivisesti definiitti) kovarianssimatriisi voidaan edellä todetun ja edellisen tehtävän perusteella muotoilla näin:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(Yllä $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ ja $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2]$ eivät viittaa selittäjämatriiseihin vaan ovat symboleita matriiseille ylipäänsä.) Sen luoteiselementti on

$$(\mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1} = [\mathbf{X}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1]^{-1} = [\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1]^{-1},$$

Huomataan, että luoteiselementti on $(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}$, jos $\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$. Tämä vastaa tehtävässä ensin mainittua eksogeenisten selittäjien tilannetta.

Luovutaan eksogeenisuusoletuksesta, jolloin kovarianssimatriisi ei ole enää lohkodiagonaalinen. Nyt tulisi osoittaa, että

$$(\mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1} - (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}$$

on positiivisesti semidefiniitti matriisi. Tämä on tehty kirjan sivulla 113. Todistuksen idea on, että matriisien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ erotus $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ on positiivisesti (semi)definiitti jos käänteismatriisien erotus $\mathbf{B}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}$ on positiivisesti (semi)definiitti. Tehtävän tilanteessa erotuksen

$$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1'\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1 \overset{\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2\&\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_2'}{=} (\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1)'(\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1)$$

tulisi siis olla positiivisesti semidefiniitti matriisi. Se on, koska mikä tahansa matriisi muotoa $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ oleva matriisi on positiivisesti semidefiniitti (kirjan s. 99). Kun eksogeenisuusoletus ei päde eli kovarianssimatriisi ei ole lohkodiagonaalinen, kovarianssimatriisin luoteiselementti on "suurempi"kuin lohkodiagonaalisessa tilanteessa.

Tehtävä on kirjan HT 7.12.

4.

a) Dummy-matriisi $(n \times m)$ on

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} \end{bmatrix},$$

jossa $\boldsymbol{\iota}$ on T-vektori $[1 \ldots 1]'$ $(n = mT)$.

b) Lasketaan matriisi $\mathbf{M_D} = \mathbf{I}_n - \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{P_D}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} T^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D} \\
&\overset{\text{r,s-sääntö}}{=} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1}\boldsymbol{\iota}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nyt väite voidaan todistaa:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathbf{D}}\mathbf{x} &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{D}})\mathbf{x} \\
&= \mathbf{I}_n\mathbf{x} - \begin{bmatrix} T^{-1}\boldsymbol{\iota}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\sum_{t=1}^{T} x_{mt} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I}_n\mathbf{x} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota}\bar{x}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}\bar{x}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\iota}\bar{x}_m \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Selvästikin $\{\mathbf{M}_{\mathbf{D}}\mathbf{x}\}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$.

5.

Regression (7.89) residuaalit ovat

$$\mathbf{P_D y} - \mathbf{P_D X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P_D}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{P_D X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P_D}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Yllä $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1' \dots \mathbf{v}_m']'$, jossa $\mathbf{v}_i = [v_i \dots v_i]'$ -vektoreiden pituus on m. Vektorin $\mathbf{P_D}(\mathbf{v}+\boldsymbol{\varepsilon})$ komponentit ovat samoja T:n pituisissa ryhmissä siten, että i. ryhmän kaikki jäännökset ovat ryhmäkeskiarvoja $T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(v_i+\varepsilon_{it}) = v_i + T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}$ (a)-kohta). Oletuksen mukaan v_i:t ja ε_{it}:t ovat riippumattomia. Näin ollen

$$\mathsf{Var}(v_i + T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}) = \mathsf{Var}(v_i) + \mathsf{Var}(T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{it}) = \sigma_v^2 + \sigma_\varepsilon^2/T.$$

Varianssi on sama kaikissa ryhmissä $i = 1, \dots, m$. Näin ollen kaikkien virhetermien varianssi regressiossa (7.89) on $\sigma_v^2 + \sigma_\varepsilon^2/T$.

6.

a) Yhtälöstä (7.88) saadaan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} &= \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_T + \sigma_v^2\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' \\
&= \sigma_\varepsilon^2[\mathbf{I}_T + (\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}'] \\
&= \sigma_\varepsilon^2[\mathbf{I}_T + (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\boldsymbol{\iota}(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota})^{-1}\boldsymbol{\iota}'] \\
&= \sigma_\varepsilon^2[\mathbf{I}_T + (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}].
\end{aligned}$$

Merkitään $\mathbf{V} = \mathbf{I}_T + (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}$. Kokeillaan, voisiko $\mathbf{V}^{-1/2}$ olla vakiolla kertomista vaille muotoa $\mathbf{I}_T - \lambda\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}$. Tällöin $\mathbf{V}^{-1}$ olisi

$$(\mathbf{I}_T - \lambda\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}})(\mathbf{I}_T - \lambda\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}) = \mathbf{I}_T - (2\lambda - \lambda^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} = \mathbf{I}_T - (2\lambda - \lambda^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}},$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_T &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} \\
&= [\mathbf{I}_T - (2\lambda - \lambda^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}][\mathbf{I}_T + (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}] \\
&\overset{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}=\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}}{=} \mathbf{I}_T + (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} - (2\lambda - \lambda^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} - (2\lambda - \lambda^2)(T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2)\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} \\
&\overset{\tau=T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2}{=} \mathbf{I}_T + [\tau - (2\lambda - \lambda^2) - (2\lambda - \lambda^2)\tau]\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} \\
&= \mathbf{I}_T + [\tau - 2(1+\tau)\lambda + (1+\tau)\lambda^2]\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}.
\end{aligned}$$

Edellä $\tau = T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 > 0$. Jotta yhtälö pitäisi paikkansa, tulisi päteä

$$(1+\tau)\lambda^2 - 2(1+\tau)\lambda + \tau = 0$$

eli

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{\tau}{1+\tau} = 0.$$

Yhtälöllä on reaalijuuret

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{\tau + 1}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 + 1}}.$$

Valitaan

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 + 1}} \in (0, 1).$$

On löydetty $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T - \lambda \mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}),$$

jossa $\lambda = 1 - (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 + 1)^{-1/2}$.

Todetaan lisäksi, että suurilla havaintomäärillä

$$\mathbf{\Sigma}^{-1/2} \approx \frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T - \mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}}).$$

b) Yhtälöiden (7.03) ja (7.04) mukaan yleistetty PNS-estimaattori

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_Y = (\mathbf{X}'\mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

saadaan laskemalla regressio

$$\mathbf{\Psi}'\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{\Psi}'\mathbf{u}.$$

Yllä $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}'$. Tehtävän tilanteessa

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}.$$

Selvästikin

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{-1} \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1/2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{-1/2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Määritellään $\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{\Psi}$, jossa $\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}})/\sigma_\varepsilon$, jossa $\lambda = 1 - (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 + 1)^{-1/2}$ (a)-kohta). Koska $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\iota}} = \boldsymbol{\iota}(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota})^{-1}\boldsymbol{\iota}' = T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}'$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}^{-1/2} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_T - \lambda T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}')/\sigma_\varepsilon & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}_T - \lambda T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}')/\sigma_\varepsilon & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & (\mathbf{I}_T - \lambda T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}')/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix} \\
&= \sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \begin{bmatrix} T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & T^{-1}\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\iota}' \end{bmatrix}) \\
&\overset{\text{HT 12.4}}{=} \sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D).
\end{aligned}$$

$\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{\Psi}$ on symmetrinen matriisi.

Yleistetty PNS-estimaattori saadaan nyt laskemalla regressio

$$\sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{y} = \sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{u}$$

tai yhtäpitävä regressio

$$(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{y} = (\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\mathbf{u} \equiv (\mathbf{I_n} - \lambda \mathbf{P_D})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^*.$$

Edellisillä merkinnöillä $\mathbf{\Omega}^{-1} = \sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)\sigma_e^{-1}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D) = \sigma_e^{-2}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)^2$. Yleistetyn PNS-estimaattorin kovarianssimatriisin kaavan (7.05) perusteella

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(\overset{\wedge}{\beta}_Y) &= (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \\
&= \{\mathbf{X}'[\sigma_e^{-2}(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)^2]\mathbf{X}\}^{-1} \\
&= \sigma_e^2[\mathbf{X}'(\mathbf{I}_n - \lambda \mathbf{P}_D)^2\mathbf{X}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Tyypillisesti suureet σ_e^2 ja $\lambda = 1 - (T\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2 + 1)^{-1/2}$ ovat tuntemattomia, jolloin ne joudutaan estimoidaan (feasible GLS).

Tehtävä on kirjan HT 7.25.