Ratkaisuehdotukset 11. harjoituksiin

1. Selvennetään aluksi tehtävän merkinnät (kirjan s:t 220–221 ja 243–244): $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ on regressiofunktion $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$ derivaatoista koostuva $n \times k$ -matriisi (kirjan s:t 220–221), $\boldsymbol{\beta}$ on $k \times 1$ -vektori, $\acute{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\acute{\boldsymbol{\beta}})$, $\acute{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\acute{\boldsymbol{\beta}})$, $\acute{\boldsymbol{\beta}} = [\acute{\boldsymbol{\beta}}_1' \; \mathbf{0}']'$ ja $\acute{\boldsymbol{\beta}}_1$ on $\sqrt{n}$-tarkentuva (root-n consistent; kirjan s. 191) estimaattori parametrivektori $\boldsymbol{\beta}_1$:lle ($k_1 \times 1$). Nollahypoteesin mukaan parametrivektori on $\boldsymbol{\beta}_0 = [\boldsymbol{\beta}_1' \; \mathbf{0}']$ eli $\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ ($k_2 \times 1$). Tehtävässä derivaattamatriisi $\acute{\mathbf{X}}$ on ositettu lohkoihin $\acute{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1(\acute{\boldsymbol{\beta}})$ ($n \times k_1$) ja $\acute{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_2(\acute{\boldsymbol{\beta}})$ ($n \times k_2$). $\mathbf{M}_1$ on ortogonaalinen projektiomatriisi, joka projisoi vastahypoteesin mukaisesti avaruuteen $\mathsf{S}^{\perp}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_0))$. Alla $\mathbf{M}_0$ on ortogonaalinen projektiomatriisi, joka projisoi nollahypoteesin mukaisesti avaruuteen $\mathsf{S}^{\perp}(\mathbf{X}_1(\boldsymbol{\beta}_0))$.

Tuloksen (6.40) mukaan $\overset{\wedge}{\mathbf{u}} \overset{a}{=} \mathbf{M}_1\mathbf{u}$. Kirjan jaksossa 6.7 (s. 243 ja kurssin HT 9.3) osoitettiin, että rajoitetun mallin (2) ja rajoittamattoman mallin (1) epälineaarisella PNS:llä laskettujen residuaalineliösummien erotus on

$$\mathbf{u}'(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_1)\mathbf{u}. \tag{6}$$

Vastaavan F-testisuureen nimittäjä on residuaalineliösumma rajoittamattomasta mallista (1) jaettuna $n-k$:lla, mikä on asymptoottisesti σ_0^2.

GN-regressioiden

$$\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}} = \acute{\mathbf{X}}_1\mathbf{b}_1 + \text{residuaalivektori} \tag{6.80}$$

ja

$$\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}} = \acute{\mathbf{X}}_1\mathbf{b}_1 + \acute{\mathbf{X}}_2\mathbf{b}_2 + \text{residuaalivektori} \tag{6.81}$$

residuaalineliösummat ovat

$$(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})'\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}_1}(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})$$

ja

$$(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})'\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}}(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}}).$$

Yllä $\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}_1} \equiv \mathbf{I} - \acute{\mathbf{X}}_1(\acute{\mathbf{X}}_1'\acute{\mathbf{X}}_1)^{-1}\acute{\mathbf{X}}_1'$ ja $\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}} \equiv \mathbf{I} - \acute{\mathbf{X}}(\acute{\mathbf{X}}'\acute{\mathbf{X}})^{-1}\acute{\mathbf{X}}'$. Näin ollen yllä oleviin GN-regressioihin liittyvän F-testisuureen osoittaja kerrottuna r:llä on

$$\mathsf{RSSR} - \mathsf{USSR} = (\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})'\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}_1}(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}}) - (\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})'\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}}(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}}).$$

Estimaatin $\acute{\boldsymbol{\beta}}$ tarkentuvuudesta seuraa, että $\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}_1}$ konvergoi stokastisesti $\mathbf{M}_{\mathbf{0}}$:aan ja $\mathbf{M}_{\acute{\mathbf{X}}}$ $\mathbf{M}_1$:hteen, kun $n \to \infty$.

Tulos (6.40) ja sen johto pätevät myös, jos $\overset{\wedge}{\boldsymbol{\beta}}$ korvataan toisella tarkentuvalla estimaattorilla $\acute{\boldsymbol{\beta}}$:lla. Näin ollen

$$\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}} \overset{a}{=} \mathbf{M}_0\mathbf{u}.$$

Yhdistämällä edelliset tulokset GN-regressioiden residuaalineliösummien erotukseksi saadaan asymptoottisesti (kirjan sivujen 227 ja 243 ja kurssin HT 9.3:n mukaisesti)

$$\mathsf{RSSR} - \mathsf{USSR} \stackrel{a}{=} \mathbf{u}'\mathbf{M}_0\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0\mathbf{u} = \mathbf{u}'(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_1)\mathbf{u}. \tag{7}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1$ (kirjan s:t 66–67 ja tuolloinen luento).

GN-regressioihin liittyvän vastaavan F-testisuureen nimittäjä on regression (6.81) residuaalineliösumma jaettuna $n-k$:lla. Nollahypoteesin pätiessä regression kerroinvektorien $\mathbf{b}_1$ ja $\mathbf{b}_2$ PNS-estimaatit ovat asymptoottisesti nollavektoreita. Regression residuaalineliösumma jaettuna $n-k$:lla on suurilla havaintomäärillä siten oleellisesti $(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})'(\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}})/(n-k)$ eli $\mathbf{u}'\mathbf{M}_0\mathbf{u}/(n-k)$, joka konvergoi stokastisesti σ_0^2:een.

Huomataan, että asymptoottisesti GN-regressioihin liittyvän F-testisuureen osoittaja (kertaa r) (7) on sama kuin malleista (1) ja (2) epälineaarisella PNS:llä lasketun vastaavan F-testisuureen osoittaja (kertaa r) (6) ja että myös testisuureiden nimittäjät ovat asymptoottisesti samat. Näin ollen testisuureet ja siten niiden jakaumat ovat asymptoottisesti samat.

Tehtävä on kirjan HT 6.9.

2.

Korvataan rajoittamattomassa mallissa (3) jäännökset u_{t-1} ja u_{t-2} lausekkeilla $y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}$ ja $y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}$. Näin saadaan yhtälö

$$y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + \rho_1(y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}) + \rho_2(y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t. \tag{8}$$

Nollahypoteesin $\rho_1 = \rho_2 = 0$ pätiessä tarkentuva estimaattori parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$:lle on PNS-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ regressiosta, jossa y_t:tä selitetään $\mathbf{X}_t$:llä (mallin (3) mukainen regressio olettaen toisistaan riippumattomat jäännökset).

GN-regression selittäjät eli regressiofunktion derivaatat sen parametrien suhteen

$$\begin{aligned}
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial(\boldsymbol{\beta}') &= \mathbf{X}_t - \rho_1\mathbf{X}_{t-1} - \rho_2\mathbf{X}_{t-2}, \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_1 &= y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta} \quad \text{ja} \\
\partial x_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\rho_2 &= y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2}\boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

Testausta varten GN-regressio tulee kehittää mallin (8) nollahypoteesin mukaisesti estimoidun eli rajoitetun epälineaarisen PNS-estimaattorin arvolla

$$[\boldsymbol{\beta}' \ \rho_1 \ \rho_2]'\big|_{\boldsymbol{\beta}=\tilde{\boldsymbol{\beta}},\rho_1=\rho_{2=0}} = [\tilde{\boldsymbol{\beta}}' \ 0 \ 0]' \tag{9}$$

tai rajoittamattomasta epälineaarisesta PNS-estimaattorista

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{\text{EPNS}} \ \hat{\rho}_{1,\text{EPNS}} \ \hat{\rho}_{2,\text{EPNS}}]'$$

muodostetun vektorin

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{\text{EPNS}}\ 0\ 0]'$$

arvolla (kirjan sivut 244–245; yllä on selvyyden vuoksi korostettu EPNS-indekseillä estimaattoreiden epälineaarisuutta). Rajoitetun epälineaarisen PNS-estimaattorin $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ lasku typistyy tehtävän tilanteessa mallin (3) tavalliseen PNS-estimointiin (riippumattomilla u_t-jäännöksillä), jolloin $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$. Ensimmäinen vaihtoehto johtaa siten tehtävän tilanteessa helposti laskettavaan ja muutenkin luontevaan testisuureeseen, joten edetään ensimmäisen vaihtoehdon mukaisesti.

GN-regression selittäjät ovat nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_t - \rho_1\mathbf{X}_{t-1} - \rho_2\mathbf{X}_{t-2}|_{\beta=\hat{\beta},\rho_1=\rho_2=0} &= \mathbf{X}_t, \\
y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}|_{\beta=\hat{\beta},\rho_1=\rho_2=0} &= y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{ja} \\
y_{t-1} - \mathbf{X}_{t-1}\boldsymbol{\beta}|_{\beta=\hat{\beta},\rho_1=\rho_2=0} &= y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2}\hat{\boldsymbol{\beta}}.
\end{aligned}$$

GN-regressio on siten

$$y_t - \mathbf{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}_t\mathbf{b} + r_1(y_{t-1} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + r_2(y_{t-2} - \mathbf{X}_{t-2}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \text{residuaali} \tag{10}$$

eli

$$\hat{u}_t = \mathbf{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}} + r_1\hat{u}_{t-1} + r_2\hat{u}_{t-2} + \text{residuaali}, \tag{11}$$

jossa $\hat{u}_t$ on PNS-residuaali rajoitetusta mallista (8) (mallista (3) olettaen riippumattomat u_t-jäännökset).

GN-regressiosta (10) laskettu F-testi hypoteesille $r_1 = r_2 = 0$ on edellisen tehtävän (HT 11.1) mukaan asymptoottisesti yhtäpitävä F-testin (6.70) hypoteesille $\rho_1 = \rho_2 = 0$ kanssa. Nollahypoteesia $\rho_1 = \rho_2 = 0$ voidaan siten testata yllä olevan regression avulla helpolla ja intuitiivisellä tavalla.

Huom! Havainnot ovat ajankohdilta $t = 1, \ldots, n$, joten PNS-residuaalit $\hat{u}_{-1}$ ja $\hat{u}_{-2}$ eivät ole havaittavia. Ne on joko korvattava keinotekoisesti nollilla tai mallit on estimoitava havainnoista $t = 3, \ldots, n$.

Ylimääräistä kommentointia: Kirjan sivuilla 275–276 ja luennolla osoitettiin ja HT 12.2:ssa osoitetaan toistamiseen, että regressio yllä AR(1)-jäännöksen tilanteessa on yhtäpitävä regression

$$y_t = \mathbf{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}} + r_1\hat{u}_{t-1} + \text{residuaali}$$

kanssa. Vastaava tulos tehtävän AR(2)-jäännöksen tilanteeseen voidaan osoittaa aivan samalla lailla, joten regressio (11) on yhtäpitävä regression

$$y_t = \mathbf{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}} + r_1\hat{u}_{t-1} + r_2\hat{u}_{t-2} + \text{residuaali}$$

kanssa. Yllä johdettu F-testi on siten intuitiivisesti ikään kuin testi puuttuville selittäjille regressiossa (3) (vrt. regressio (8)).

Tehtävä on kirjan HT 6.10.

3.

a) Derivoidaan lauseke (7.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'}[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]\boldsymbol{\Omega}^{-1}[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'}[\mathbf{y}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})+\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] \\
&\overset{\text{HT 1.1}}{=} -2\mathbf{y}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})+\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})+\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) \\
&= -2[\mathbf{y}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})].
\end{aligned}$$

Yllä $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ on $n\times k$ -matriisi, jonka t. rivi on $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})=\partial\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}'$ (kirjan sivujen 220–221 merkinnöin). Toinen yhtäsuuruus seuraa HT 1.1:n kaavasta (2)

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}\mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}'\frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}'} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}'}.$$

Asettamalla derivaatat nollaksi, jakamalla yhtälöt -2:lla ja transponoimalla saadaan kysytty tulos

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Omega}^{-1}[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}_{k\times 1}.$$

b) Lineaarisessa tilanteessa $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{X}$ ja $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$. Sijoitetaan yhtälöön (7.14) $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$:n paikalle $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$:n paikalle $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_Y) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\
\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_Y = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\
\hat{\boldsymbol{\beta}}_Y = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}&.
\end{aligned}$$

(Parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ muuttuu estimaattoriksi samalla hetkellä, kun $\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ asetetaan $\mathbf{0}$-vektoriksi. Vastaavan muutoksen voisi tehdä myös a)-kohdan viimeisellä rivillä.) Matriisin kääntäminen viimeisellä rivillä on mahdollinen, koska matriisin $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ täytyy olla täysiasteinen ja oletuksen mukaan matriisi $\mathbf{X}$ on täysiasteinen, joten myös matriisi $\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}$ $(k\times k)$ on täysiasteinen.

4.

a) Lineaarisen mallin tilanteessa momenttiestimaattori toteuttaa ehdon

$$\mathbf{W}'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0} \tag{7.08}$$

(kirjan s:t 216 ja 259). Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}$ (kaava (7.09)).

Sijoittamalla PNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ kaavaan $\mathbf{X}'=\mathbf{W}'$ ja yleistetyn PNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}$ kaavaan $\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\mathbf{W}'$ saavat molemmat estimaattorit kysytyn muodon $(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}$. Molemmat valinnat tuottavat täysiasteisen $(n\times k)$ ja eksogeenisen matriisin $\mathbf{W}$.

b) Lasketaan PNS-estimaattorin kovarianssimatriisi:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\overset{\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0+\mathbf{u}}{=}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\Leftrightarrow$$
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathsf{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)'] \\ &= \mathsf{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] \\ &\overset{\text{eksog.}}{=} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.\end{aligned}$$

Vastaavasti johdetaan

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}-\boldsymbol{\beta}_0=\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}) &= \mathsf{E}\left[\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\right] \\ &\overset{\text{eksog.}}{=} \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \\ &= =\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}-\boldsymbol{\beta}_0=(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{u}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathsf{E}\left[(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{W}\,(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1}\right] \\ &\overset{\text{eksog.}}{=} (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1}.\end{aligned}$$

c) Palautetaan ensiksi mieleen vihje1:ssä viitattu tulos: Jos matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat dimensioiltaan yhteneväiset ja ovat positiivisesti semidefiniittejä, niin matriisi $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ on positiivisesti semidefiniitti, jos ja vain jos matriisi $\mathbf{B}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}$

on positiivisesti semidefiniitti (kirjan s. 105 ja HT 5.4). Tehtävänä on osoittaa, että matriisi

$$(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

on positiivisesti semidefiniitti. Edellä mainitun tuloksen mukaan väite voidaan todistaa yhtäpitävästi osoittamalla, että

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\left(\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}$$

on positiivisesti semidefinitti matriisi. Osoitetaan se.

Aloitetaan todistus hyödyntämällä vihje2:hta eli hajotelmaa (7.02) $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}'$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\left(\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X} \\
&= \mathbf{X}'\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}'\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{W}[\mathbf{W}'\left(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}'\right)^{-1}\mathbf{W}]^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X} \\
&= \mathbf{X}'\left[\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}' - \mathbf{W}[\mathbf{W}'(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\mathbf{W}]^{-1}\mathbf{W}'\right]\mathbf{X} \\
&= \mathbf{X}'\boldsymbol{\Psi}\{\mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}[\mathbf{W}'(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\mathbf{W}]^{-1}\mathbf{W}'(\boldsymbol{\Psi}')^{-1}\}\boldsymbol{\Psi}'\mathbf{X} \\
&= \mathbf{X}'\boldsymbol{\Psi}\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}}\boldsymbol{\Psi}'\mathbf{X} \\
&= \mathbf{Z}'\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}}\mathbf{Z},
\end{aligned}$$

jossa $\mathbf{Z} \equiv \boldsymbol{\Psi}'\mathbf{X}$ ja $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}}$ on ortogonaalinen projektiomatriisi avaruuteen $\mathsf{S}^{\perp}(\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W})$. Matriisille on yllä haettu lopussa vihjeen3 mukainen muoto. Ortogonaaliset projektiomatriisit ovat (kirjan sivun 113 todistuksen mukaan) positiivisesti semidefiniittejä ja $\mathbf{Z}$ on täysiasteinen astetta k oleva matriisi. Matriisi $\mathbf{Z}'\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}}\mathbf{Z}$ on siten HT 1.5:n mukainen matriisi ja HT 1.5:n perusteella semidefiniitti. Näin ollen

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\left(\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X} = \mathbf{Z}'\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{W}}\mathbf{Z}$$

ja siten myös

$$(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

on positiivisesti semidefiniitti matriisi.

Kohta on kirjan HT 7.2.

d) PNS-estimaattoria ei kannata unohtaa. Yleistetty PNS-estimaattori typistyy tavanomaiseksi PNS-estimaattoriksi, jos $\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2\mathbf{I}$ eli virhetermit ovat homoskedastisia ja keskenään korreloimattomia.

Kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Omega}$ rakenne saati sen elementtien arvot eivät tyypillisesti ole tiedossa, joten yleistetyn PNS-estimaattorin laskeminen ei tyypillisesti onnistu. Jos sen rakennekaan ei ole tiedossa, $\boldsymbol{\Omega}$:aa ei voida edes estimoida (järkevästi), sillä siinä on $n(n+1)/2$ vapaata parametria. (Olethan selvittänyt itsellesi miksi?!) Tällöin yleistetty PNS ei ole edes approksimatiivisesti toteutettavissa (feasible GLS). Tällöin voidaan käyttää PNS:ää ja estimoida b)-kohdassa esitetty PNS-estimaattorin kovarianssimatriisi, joka on estimoitavissa huolimatta $\boldsymbol{\Omega}$:n $n(n+1)/2$:sta parametrista (kirjan jakso 5.5). Estimointi voidaan tehdä siten tällöinkin järkevästi PNS:llä ja tilastollinen päättely viimeksi mainitun kovarianssimatriisin avulla.