Harjoitusten 10 vastaukset

1.

Tutkitaan lineaarista mallia

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u},$$

jossa parametrivektorien $\boldsymbol{\beta}_1$ ja $\boldsymbol{\beta}_2$ dimensiot ovat k_1 ja k_2 ja muut merkinnät ovat ilmeiset. Estimoidaan malli PNS:llä sisällyttäen siihen kaikki muuttujat tai vain matriisin $\mathbf{X}_1$ sisältämät muuttujat. Näin saaduille PNS-residuaalivektoreille ($\hat{\mathbf{u}}$ ja $\tilde{\mathbf{u}}$) pätee eksaktisti (kirjan s:jen 58 ja 67 merkinnöin):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{u} \text{ ja} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{M}_1\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Testattaessa nollahypoteesia $\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ testisuureen F osoittaja (kertaa k_2) on (kirjan s:t 110 ja 141)

$$\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'\mathbf{M}_1\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}. \tag{1}$$

Tämä on täsmälleen tehtävässä annettua muotoa oleva lauseke. Merkitsemällä nolla- ja vastahypoteesien mukaisia projektiomatriiseja yllä $\mathbf{M}_0$:lla ja $\mathbf{M}_1$:llä yllä oleva lauseke voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{u}'\mathbf{M}_0\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{M}_1\mathbf{u}. \tag{2}$$

Tämä on täsmälleen tehtävässä annettu lauseke.

Lausekkeet (1) ja (2) ovat merkitykseltään täsmälleen samoja. Ero on ainoastaan merkinnöissä. Tehtävässä annettu tulos (2) pätee siten eksaktisti lineaarisen regressiomallin tilanteessa.

2.

a) Todistetaan symmetrisyys:

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1)' = \mathbf{P}_{\mathbf{X}}' - \mathbf{P}_1' = \mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1,$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus seuraa matriisien $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ ja $\mathbf{P}_1$ symmetrisyydestä (kirjan s:t 58–59 ja 66). Matriisi $\mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1$ on symmetrinen.

Todistetaan idempotenttius:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1)(\mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1) &= \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{P}_{\mathbf{X}} + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_{\mathbf{X}} \\ &\overset{\text{idemp.}}{=} \mathbf{P}_{\mathbf{X}} + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_{\mathbf{X}} \\ &\overset{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_{\mathbf{X}}=\mathbf{P}_1 \text{ (s. 66)}}{=} \mathbf{P}_{\mathbf{X}} - \mathbf{P}_1. \end{aligned}$$

Matriisi $\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$ on idempotentti.

b) HT 5.2:n mukaan $\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2} = \mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\mathsf{r}(\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1) &\overset{\text{HT 5.2}}{=} \mathsf{r}(\mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}) \\
&= \mathsf{r}\{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2[(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2]^{-1}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\}.
\end{aligned}$$

Yllä

$$\begin{aligned}
\mathsf{r}[(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2] &\overset{\text{vihje3}}{=} \mathsf{r}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) \\
&= \min \mathsf{r}\{\mathbf{M}_1, \mathbf{X}_2\} \\
&\overset{\text{HT 2.1 c)}}{=} \min\{n - k_1, k_2\} \\
&= k_2,
\end{aligned}$$

sillä muuten pätisi $n - k_1 < k_2 \Leftrightarrow n < k_1 + k_2 = k$, joka olisi ristiriidassa tehtävänannon oletusten kanssa. Näin ollen $\mathsf{r}\{[(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2]^{-1}\} = k_2$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\mathsf{r}(\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1) &= \mathsf{r}\{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2[(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2]^{-1}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)'\} \\
&\overset{\text{vihje3}}{=} \min \mathsf{r}\{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2, k_2\} \\
&\overset{\text{yltä}}{=} \min \mathsf{r}\{k_2, k_2\} \\
&= k_2.
\end{aligned}$$

Matriisin $\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$ aste on k_2. Se projisoi siten avaruuteen, jonka aste eli dimensio on k_2.

3. Parametrivektorin $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1' \ \boldsymbol{\beta}_2']'$ PNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ kovarianssimatriisi on $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ (esim. kirjan s. 100). Kysytty tulos

$$\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \sigma^2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$$

pätee, jos matriisin $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ kaakkoisnurkka $(k_2 \times k_2)$ on $(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}$. Vihjeen eli HT 5.1 b):n mukaan niin on:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} + (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \\ (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(Tuloksen näkee jo kolmannelta riviltä.)

4. Sekä $g(\theta_0)$ että derivaatat $g'(\theta_0)$ ja $g''(\theta_0)$ ovat kiinteitä lukuja. Termi

$$\hat{\theta} - \theta_0$$

on oletuksen mukaan $\sqrt{n}$-tarkentuva eli se täytyy kertoa $\sqrt{n}$:llä, jotta sen asymptoottinen jakauma ei kutistuisi lukuun 0. Termi

$$(\hat{\theta} - \theta_0)^2 = (\hat{\theta} - \theta_0) \times (\hat{\theta} - \theta_0)$$

täytyy siten kertoa $\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$:llä, jotta sen asymptoottinen jakauma ei kutistuisi lukuun 0.

Näin ollen Taylor-approksimaation

$$g(\hat{\theta}) \approx g(\theta_0) + g'(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0) + \frac{1}{2}g''(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^2.$$

viimeinen termi suppenee nopeammin kohti 0:aa kuin sitä edeltävä termi. Se on siksi suurilla havaintomäärillä merkityksettömän pieni edeltävään termiin verrattuna.