REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

## 2. välikokeen 16.12.2011 ratkaisuehdotukset

Vastaukset alla ovat yksityiskohtaisempia kuin todellisissa vastauksissa edellytetään. Yksityiskohtien (ja toiston) tarkoitus on auttaa opiskelijoita, jotka eivät vastanneet tehtävään kokeessa oikein. Alla on myös tehtäviin liittyviä huomioita, viittauksia harjoitustehtäviin ja kirjan sivuihin, joita ei tietenkään edellytetä oikeaan vastaukseen.

1.

a) PNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (ehdollistettu) kovarianssimatriisi $\mathsf{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ on

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)'|\mathbf{X}] &= \mathsf{E}\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'|\mathbf{X}\} \\
&= \mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|\mathbf{X}] \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}
\end{aligned}$$

(kirjan s. 197). Yllä yhtäsuuruus $\mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X}) = \mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}')$ seuraa eksogeenisuusoletuksesta.

b) Ongelma kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Omega}$ estimoinnissa on, että $\boldsymbol{\Omega}$:ssa on $n(n+1)/2$-parametria, mutta havaintoja on vain $n$ kappaletta. ($\boldsymbol{\Omega}$ on symmetrinen, joten sen $l$. rivillä on $l$ vapaata parametria. Yhteensä vapaita parametrejä on $1+2+\cdots n = n(n+1)/2$.) Jotta $\boldsymbol{\Omega}$ olisi estimoitavissa, tulee sen rakennetta rajoittaa. (Esimerkiksi jos jäännös on AR(1)-prosessi, kaikki $\boldsymbol{\Omega}$:n komponentit riippuvat kahdesta parametrista ja $\boldsymbol{\Omega}$ on estimoitavissa. Ks. kirjan s. 272.)

c) Vaikka $\boldsymbol{\Omega}$:aa ei voitaisi estimoida tarkentuvasti ja $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ olisi tarkentumaton(!) estimaattori $\boldsymbol{\Omega}$:lle, $\mathsf{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ voidaan estimoida tarkentuvasti kaavalla

$$\hat{\mathsf{var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

jos $\boldsymbol{\Omega}$ on diagonaalimatriisi (ja yleisemminkin; White (1980) sekä kirjan s:t 198–199 ja 202). Kirjassa esitetään useampia versioita $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$:n estimaattoreiksi (s:t 198 ja 200). Yksinkertaisin estimaattoreista on

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^2 \dots \hat{u}_n^2 \end{bmatrix},$$

jossa $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{X}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

2.

a) EPNS-estimaattori ($\hat{\boldsymbol{\beta}}$) minimoi lausekkeen

$$\sum_{t=1}^{n}[y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})]^2$$

vektorin $\boldsymbol{\beta}$ komponenttien suhteen. EPNS-estimaattori toteuttaa myös momenttiehdot

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0},$$

jossa $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) = [x_1(\boldsymbol{\beta}) \dots x_n(\boldsymbol{\beta})]'$ ja

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}.$$

(Kirjan s:t 220–221 ja 224 ja HT 8.2.) EPNS-estimaattorille ei ylipäänsä ole analyyttista kaavaa, joten se täytyy ratkaista numeerisin menetelmin.

b) Normeerattu EPNS-estimaattori on $n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)$. Sen asymptoottinen jakauma on

$$\mathsf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathsf{plim}(n^{-1}\mathbf{X}_0'\mathbf{X}_0)^{-1}),$$

jossa $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_0)$ (kirjan s. 225).

c) Nollahypoteesin mukaan

$$y_t = \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0}) + u_t;$$

vastahypoteesin mukaan

$$y_t = \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) + u_t.$$

Estimoidaan molemmat mallit EPNS:llä, ja lasketaan nolla- ja vastahypoteesien mukaiset residuaalineliösummat RSSR$= \sum_{t=1}^{n}[y_t - \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0})]^2$ ja USSR$= \sum_{t=1}^{n}[y_t - \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)]^2$. Testisuure on

$$F = \frac{(\text{RSSR} - \text{USSR})/r}{\text{USSR}/(n-k)},$$

jossa $r$ on vektorin $\boldsymbol{\beta}_2$ dimensio. Testisuure noudattaa asymptoottisesti jakaumaa $F(r, \infty)$. Testisuureen saamaa arvoa verrataan $F(r, \infty)$-jakaumaan, ja nollahypoteesi hylätään, mikäli testisuure ylittää valittuun merkitsevyystasoon liittyvän jakauman kriittisen arvon.

d) GN-regressio on

$$\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{b}+\text{residuaalivektori},$$

jossa $\mathbf{b}$ on regression kerroinvektori ($k \times 1$).

e) GN-regressio kehitettynä pisteessä $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on

$$\mathbf{y}-\mathbf{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{b}+\text{residuaalivektori}$$

eli

$$\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{X}}\mathbf{b}+\text{residuaalivektori}$$

kirjan (s:n 238) merkinnöin. PNS-estimaattori $\mathbf{b}$:lle tästä regressiosta on

$$(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}\hat{\mathbf{X}}'(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}})=\mathbf{0}.$$

Yhtäsuuruus seuraa a)-kohdan vastauksesta, jonka mukaan EPNS-estimaattori toteuttaa momenttiehdot

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]=\mathbf{0}.$$

f) Tilasto-ohjelmiston tulostama kovarianssimatriisi on

$$s^2(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1},$$

koska regression selittäjämatriisi on $\hat{\mathbf{X}}$. Yllä $s^2$ on regression jäännösvarianssin estimaatti. Tehtävän regression tilanteessa estimoidut regressiokertoimet ovat nollia (e)-kohta). Näin ollen $s^2$ on vektorin $\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}}$ komponenttien otosvarianssi. Koska EPNS-estimaattori on tarkentuva, $\hat{\mathbf{x}}$ konvergoi stokastisesti $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$:aan, $\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}}$ vastaavasti $\mathbf{y}-\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$:aan ja $s^2=(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}})'(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}})$ alkuperäisen epälineaarisen mallin jäännösvarianssiin $\sigma^2$:seen, kun havaintojen lukumäärä kasvaa kohti ääretöntä. Samoin $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$:n komponentit konvergoivat stokastisesti $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_0)$:aan. Tilasto-ohjelmiston tulostama kovarianssimatriisi on siten b)-kohdan mukainen estimaatti EPNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ kovarianssimatriisille suurilla havaintomäärillä (huomaa estimaatin normeerauksen vaikutus kovarianssimatriisiin b)-kohdassa). Täsmälleen tilasto-ohjelmiston tulostaman mukainen kovarianssimatriisin estimaatti esitettiin kirjan sivulla 226 (kaava (6.32)) estimaatiksi EPNS-estimaattorin kovarianssimatrille suurilla havaintomäärillä.

3.

a) Vastahypoteesin pätiessä malli on (kirjan s:n 28 merkinnöin)

$$\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + \theta(\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})^2 + u_t \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k \beta_i x_{ti} + \theta(\sum_{i=1}^k \beta_i x_{ti})^2 + u_t \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k \beta_i x_{ti} + \sum_{i=1}^k \theta\beta_i^2 x_{ti}^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1+1}^k 2\theta\beta_i\beta_j x_{ti}x_{tj} + u_t \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k \beta_i x_{ti} + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_{ti}^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1+1}^k \delta_{ij} x_{ti}x_{tj} + u_t.
\end{aligned}$$

Selittävät muuttujat ovat $x_{ti}$ $(i = 1, \dots, k)$, niiden neliöt $x_{ti}^2$ $(i = 1, \dots, k)$ ja ristitulotermit $x_{ti}x_{tj}$ $(i = 1, \dots, k-1$ ja $j = i+1, \dots, k)$. Niitä vastaavat parametrit ovat $\beta_i$, $\gamma_i = \theta\beta_i^2$ ja $\delta_{ij} = 2\theta\beta_i\beta_j$. Malli on epälineaarinen, koska sen parametrien välillä on epälineaarisia rajoituksia.

b) Gauss–Newton (GN) -regression yleinen muoto on (kirjan s:t 220–221 ja 236)

$$y_t - x_t(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})\mathbf{b} + \text{residuaali},$$

jossa $x_t(\boldsymbol{\beta})$ on regressiofunktio, $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})$ on regressiofunktion derivaatoista koostuva $1 \times k$ -vektori ja $\mathbf{b}$ $(k \times 1)$ on regression keinotekoinen parametrivektori. Tehtävän tilanteessa $\boldsymbol{\beta}$:aa yllä vastaava parametrivektori on $\boldsymbol{\beta}^* \equiv [\boldsymbol{\beta}' \ \theta]'$ $((k+1) \times 1)$. Se ja derivaatat

$$\frac{\partial[\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}(1 + \theta\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})]}{\partial\boldsymbol{\beta}'} = 2\theta(\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_t$$

ja

$$\frac{\partial[\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}(1 + \theta\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})]}{\partial\theta} = (\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})^2$$

huomioiden GN-regressio on

$$y_t - \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}(1 + \theta\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}) = [2\theta(\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_t]\mathbf{b}_1 + (\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})^2 b_2 + \text{residuaali}. \quad \text{(GNR)}$$

Keinotekoiset kertoimet sisältävät $\mathbf{b}_1$ ja $b_2$ ovat dimensioiltaan $k \times 1$ ja $1 \times 1$.

Edetään kirjan sivuilla 244–247 esitetyllä tavalla. Testaus on erityisen kätevää GN-regression avulla, kun malli typistyy lineaariseksi nollahypoteesin pätiessä (kirjan s:t 245–247 ja 249). Näin käy mallille (3) tehtävän tilanteessa. Mallin (3) parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ voidaan siten nollahypoteesin pätiessä estimoida $\sqrt{n}$-tarkentuvasti (kirjan s. 191) tavallisella PNS:llä. Merkitään $\acute{\boldsymbol{\beta}}$:lla näin saatua PNS-estimaattia ja $\acute{\boldsymbol{\beta}}^* = [\acute{\boldsymbol{\beta}}' \ 0]'$:lla näin saatua $\boldsymbol{\beta}^*$:n nollahypoteesin mukaista estimaattia. Kehitetään regressio (GNR) PNS-estimaatin arvolla $\acute{\boldsymbol{\beta}}^*$:

$$y_t - \mathbf{X}_t\acute{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}_t\mathbf{b}_1 + (\mathbf{X}_t\acute{\boldsymbol{\beta}})^2 b_2 + \text{residuaali}.$$

Nollahypoteesia $\theta = 0$ voidaan testata yllä olevasta regressiosta tavallisella $F$-testisuureella — tai tehtävän yhden testattavan parametrin tilanteessa yhtäpitävästi $t$-testisuureella — hypoteesille $b_2 = 0$ (kirjan s. 246 ja kurssin HT 11.1).

4.

a) Eksogeenisuusoletuksesta seuraa ennaltamääräytymisehto $\mathsf{E}(u_t|\mathbf{X}_t) = 0$ (kirjan s. 90) ja että

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t'\mathsf{E}(u_t|\mathbf{X}_t) &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \\ \mathsf{E}(\mathbf{X}_t'u_t|\mathbf{X}_t) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Jos ehdollinen odotusarvo on $\mathbf{0}$ kaikilla ehdon mahdollisilla arvoilla, on ehdollistamatonkin odotusarvo $\mathbf{0}$. (Kirjan s. 14.) Näin ollen $\mathsf{E}(\mathbf{X}_t'u_t) = \mathbf{0}$ ja kaavassa

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}_0 + (n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{X}_t'u_t$$

viimeisen termin odotusarvo on $\mathbf{0}$. Matriisi $(n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ konvergoi sopivin oletuksin stokastisesti kiinteään matriisiin. Suurten lukujen lain mukaan keskiarvovektorin $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{X}_t'u_t$ komponentit konvergoivat stokastisesti nollaan. Näin ollen PNS-estimaattori $(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ on tarkentuva. (Kirjan s:t 95–96.)

Eksogeenisuusoletuksesta seuraa, että $\mathsf{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ ja

$$\mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}|\mathbf{X})] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

eli että

$$\mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}] = \mathbf{0}.$$

(Jos ehdollinen odotusarvo on ehdosta riippumatta 0, on odotusarvokin 0.) PNS-estimaattori on siten harhaton eli $\mathsf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}_0$. (Vrt. kirjan s. 89.)

PNS-estimaattori on tehokas, kun lineaarisen mallin jäännöksen kovarianssimatriisi on $\sigma^2\mathbf{I}$ (Gauss–Markov-lause; kirjan s. 106). Tehtävän tilanteessa ehto ei päde, joten PNS-estimaattori ei ole tehokas.

Merkitään jäännöksen kovarianssimatriisia $\mathbf{\Omega}$:lla. Yleistetty PNS (YPNS) -estimaattori $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$ olisi ylipäänsä parempi estimaattori, sillä se huomioi jäännösten korrelaatiot. YPNS-estimaattori toteuttaa Gauss–Markov-lauseen oletukset, joten se on tehokas estimaattori tehtävän tilanteessa (kirjan s:t 104 ja 258). (Jos oletuksen vastaisesti $\rho$ olisi 0, niin $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}$ olisi tehokas estimaattori.)

PNS-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (ehdollistettu) kovarianssimatriisi on analyyttisesti laskettavissa:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'|\mathbf{X}] &= \mathsf{E}\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'|\mathbf{X}\} \\ &= \mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|\mathbf{X}] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

(kirjan s:t 197 ja 260). Yllä yhtäsuuruus $\mathsf{E}(\mathbf{uu}'|\mathbf{X}) = \mathsf{E}(\mathbf{uu}')$ johtuu eksogeenisuusoletuksesta. Kovarianssimatriisi yllä ei ole ylipäänsä sama kuin $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

(Kirjan sivulla 260 todetaan lisäksi, että $\mathsf{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathsf{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$ on positiivisesti definiitti matriisi, mikä todistettiin HT 11.4 c):ssä.)

b) Koska $\rho \neq 1$, niin jäännös $u_t$ korreloi edellisen arvonsa $u_{t-1}$ kanssa (ks. tarkemmin HT 4.5) eikä ennaltamääräytymisehto $\mathsf{E}(u_t|\mathbf{X}_t) = 0$ päde. Tällöin selittäjä $y_{t-1}$ riippuu $u_{t-1}$:stä, selittäjä ja jäännös korreloivat eikä PNS-estimaattori ole tarkentuva eikä harhaton (vrt. kirjan s:t 90–92 ja HT 4.5). Se ei ole myöskään (ainakaan asymptoottisesti) tehokas, koska EPNS-estimaattori on tarkentuva (kirjan s. 287).

PNS-estimaattorin (ehdollistettu) kovarianssimatriisi ei ole (ainakaan yksinkertaisin menetelmin) analyyttisesti laskettavissa:

$$\mathsf{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'|\mathbf{X}] \overset{\text{a)-kohta}}{=} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{uu}'|\mathbf{X})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Toisin kuin edellisissä tehtävissä $\mathsf{E}(\mathbf{uu}'|\mathbf{X})$ ei ole ylipäänsä sama kuin $\mathsf{E}(\mathbf{uu}')$, sillä matriisin $\mathbf{X}$ ja vektorin $\mathbf{u}$ komponentit eivät ole riippumattomia (vrt. kirjan s:t 91–92 ja HT 4.5). Odotusarvon lasku keskeytyy siksi tähän.

Kovarianssimatriisi $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathsf{E}(\mathbf{uu}'|\mathbf{X})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ei ole ylipäänsä sama kuin kovarianssimatriisi $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

(Erikoistilanteessa $\rho = 0$ ennaltamääräytymisehto $\mathsf{E}(u_t|\mathbf{X}_t) = 0$ pätisi ja PNS-estimaattori olisi tarkentuva muttei harhaton.)