

REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot).
15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: *Econometric Theory and Methods*. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 9 (pe 18.11.)

1. Tutkitaan epälineaarista mallia

$$y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t = \beta_1 z_t^{\beta_2} + u_t,$$

jossa $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2]'$ ja $u_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Määrittele malliin liittyvä residuaalineliosummafunktio $\text{SSR}(\beta_1, \beta_2)$.
b) Derivoi $\text{SSR}(\beta_1, \beta_2)$ molempien parametrien suhteen, ja aseta derivaatat yhtäsuuriksi kuin 0.

c) Muodosta vektorit $\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$ ja $\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})$ sekä matriisi $\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})$ (kirjan merkinnöillä).

d) Muodosta yhtälöt

$$\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}})] = \mathbf{0}$$

tehtävän tilanteessa.

2. Regressiossa alla selitettävä muuttuja on y_t ja selittävät muuttujat ovat x_t ja z_t . Identifioituvatko parametrit (α , β ja γ) (mahdollisesti epälineaarisessa) pienimmän neliosumman (PNS) estimoinnissa? Voidaanko käyttää tavallista PNS:ää vai pitääkö käyttää epälineaarista PNS:ää? Jos tavallinen PNS on käytökelpoinen, selitä mikä on selitettävä muuttuja ja mitkä selittäviä muuttujia. Perustele vastauksesi.

a)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma/x_t + u_t.$$

b)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + x_t/\gamma + u_t.$$

c)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + z_t/\gamma + u_t.$$

d)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + z_t/\beta + u_t.$$

e)

$$y_t = \alpha + \beta x_t z_t + u_t.$$

f)

$$y_t = \alpha + \beta \gamma x_t z_t + \gamma z_t + u_t.$$

g)

$$y_t = \alpha + \beta \gamma x_t + \gamma z_t + u_t.$$

h)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \beta x_t^2 + u_t.$$

i)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma x_t^2 + u_t.$$

j)

$$y_t = \alpha + \beta \gamma x_t^3 + u_t.$$

k)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + (1 - \beta)z_t + u_t.$$

l)

$$y_t = \alpha + \beta x_t + (\gamma - \beta)z_t + u_t.$$

3. Tehtävä liittyy kirjan sivun 227 laskuihin (kirjan HT 6.8).

a) Osoita 2. asteen Taylor-kehityksen avulla, että epälineaarinen PNS-residuaali on

$$\hat{u}_t \approx u_t - \mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)' \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0).$$

Yllä $\boldsymbol{\beta}_0$ on parametrivektorin teoreettinen arvo ja $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_0)$ on $k \times k$ -matriisi, joka koostuu regressiofunktion $x_t(\boldsymbol{\beta})$ toisista derivaatoista kehitettynä pisteessä $\boldsymbol{\beta}_0$.

b) Määritellään $\mathbf{b} = n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)$. Suurilla havaintomäärillä \mathbf{b} noudattaa approksimatiivisesti normaalijakautunutta satunnaismuuttujaa $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} \mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} n^{-1/2} \mathbf{X}_0' \mathbf{u}$ (kirjan merkinnöillä). (Perustele.) Sijoita \mathbf{b} Taylor-kehitykseen yllä ja osoita, että $\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}'$ ja $\mathbf{u}' \mathbf{M}_{\mathbf{X}_0} \mathbf{u}$:n erotus häviää asymptoottisesti. Edellä $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_0} = \mathbf{I} - \mathbf{X}_0(\mathbf{X}_0' \mathbf{X}_0)^{-1} \mathbf{X}_0'$.

4. Johda kirjan kaava (6.46):

$$H_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ [y_t - x_t(\boldsymbol{\beta})] \frac{\partial X_{ti}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} - X_{ti}(\boldsymbol{\beta}) X_{tj}(\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$