REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 8 (pe 11.11.)

1.

a) Olkoon regressiomalli

$$y_t = \beta t^{-1} + u_t, \quad u_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2),$$

jossa β^0 on parametrin β todellinen arvo ja $t = 1, \dots, n$ (oleellisesti kirjan malli (3.20)). Perustele, että β:n PNS-estimaattori ei ole tarkentuva. Selitä tulos intuitiivisesti. (Vihje1: $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} t^{-2} = \pi^2/6$. Vihje 2: Osoita, että PNS-estimaattorin varianssi ei ole nolla edes asymptoottisesti eli kun $n \to \infty$.)

b) Olkoon regressiomalli

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t^{-1} + u_t, \quad u_t \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2),$$

jossa β_1^0 ja β_2^0 ovat parametrien β_1 ja β_2 todelliset arvot ja $t = 1, \dots, n$ (kirjan malli (3.20)). Todista, että tehtävän tilanteessa parametrivektori $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2]'$ ei ole asymptoottisesti identifioituva PNS-estimoinnissa eli että

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \mathsf{plim}\, n^{-1}\mathbf{W}'[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \begin{bmatrix} \beta_1^0 - \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0},$$

jossa $\mathbf{W}_t = [1 \ t^{-1}]$ ja $x_t(\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 + \beta_2 t^{-1}$. (Kirjan merkinnät.) (Vihje1: $\lim_{n\to\infty} (n^{-1} \sum_{t=1}^{n} t^{-1}) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(n^{-1} \sum_{t=1}^{n} t^{-2}) = 0$, $\mathsf{plim}(n^{-1} \sum_{t=1}^{n} u_t) = 0$ ja $\mathsf{plim}(n^{-1} \sum_{t=1}^{n} u_t/t) = 0$.) Onko PNS-estimaattori $\boldsymbol{\beta}$:lle siten tarkentuva?

2. Gauss–Markov -lause koskee muotoa $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, jossa $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$, olevia estimaattoreita (kirjan s. 106). Osoita, että tällaiset estimaattorit ovat momenttimenetelmäestimaattori

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}$$

muotoa, kun $\mathbf{W}$ koostuu eksogeenisista muuttujista ja $\mathbf{W}'\mathbf{X}$ on täysiasteinen matriisi.

3. Osoita, että epälineaarisen mallin

$$y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t = \beta_1 + \beta_2 z_{1t} + \beta_3 z_{t2}^{\beta_4} + u_t$$

tilanteessa

$$\mathbf{X}_t(\boldsymbol{\beta}) = [1 \quad z_{1t} \quad z_{2t}^{\beta_4} \quad \beta_3 z_{2t}^{\beta_4} \log(z_{t2}) \;]$$

(kirjan merkinnöillä).

4. Olkoon satunnaismuuttujan Y odotusarvo ehdolla muuttujat $X_1, \ldots X_k$ deterministinen funktio $h(X_1, \ldots X_k)$ eli $\mathsf{E}(Y|X_1, \ldots X_k) = h(X_1, \ldots X_k)$. Olkoon Ω informaatiojoukko, joka sisältää kaikki deterministiset funktiot muuttujista $X_1, \ldots X_k$. Todista, että

$$\mathsf{E}(Y|\Omega) = h(X_1, \ldots X_k).$$

(Vihje: Käytä iteroitujen odotusarvojen sääntöä.)

5.

a) Olkoon malli

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{u},$$

jossa $\boldsymbol{\beta}$ on k-vektori, $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$ on regressiofunktio ja jäännös $\mathbf{u} \sim \mathsf{IID}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$. Johda ensimmäisen asteen ehdot eli normaaliyhtälöt $\boldsymbol{\beta}$:n epälineaariselle PNS-estimaattorille $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (kirjan kaava (6.27)):

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}.$$

b) Osoita, että jos malli on lineaarinen, niin normaaliyhtälöt

$$\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'[y - \mathbf{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}})] = \mathbf{0}$$

pelkistyvät muotoon

$$\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}.$$