REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 5 (pe 14.10.)

1.

a) Osoita, että pätee

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kun käännettävä matriisi on symmetrinen, matriisien dimensiot ovat sopivat ja käänteismatriisit ovat olemassa.

b) Koostukoon täysiasteinen matriisi $\mathbf{X}$ kahdesta alimatriisista siten, että $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2]$. Merkitään matriisiin $\mathbf{X}_1$ liittyviä projektiomatriiseja $\mathbf{P}_1$:llä ja $\mathbf{M}_1$:llä ($\mathbf{P}_1 = \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'$ ja $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$). Osoita, että

$$\begin{aligned} &(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Malli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}.$$

Yllä $\mathbf{u}$ on tarkemmin määrittelemätön jäännösvektori, $\boldsymbol{\beta}' = [\boldsymbol{\beta}_1' \quad \boldsymbol{\beta}_2]$, $\boldsymbol{\beta}_1$ ja $\boldsymbol{\beta}_2$ ovat $k_1 \times 1$ ja $k_2 \times 1$ -vektoreita, $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat $n \times k_1$ ja $n \times k_2$ -matriiseja (k_1,$k_2 \geq 1$) ja $\mathbf{X}$ on täysiasteinen $n \times k$ -matriisi.

a) Todista hajotelma

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2}$$

(kirjan merkinnät). (Vihje: Kaava (2).) Perustele, että pätee myös

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1}.$$

b) Tulkitse hajotelma sanoin ja HT 3.5:n kuvion geometrian puitteissa.

3. Kirjan sivuilla 99–100 oletetaan, että jos $\mathbf{A}$ on (symmetrinen) positiivisesti definiitti $k \times k$-matriisi, niin on olemassa täysiasteinen matriisi $\mathbf{B}$ siten että $\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$ ei ole yksikäsitteinen). Sivulla 132 todetaan lisäksi (sivujen merkinnät

yhdenmukaistaen), että $\mathbf{B}$ voidaan valita yläkolmiomatriisiksi. Todetaan lisäksi, että matriisin $\mathbf{A}$ diagonaalitermit ovat positiivisia, koska $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti (kirjan s. 99). Todistetaan jälkimmäisen erikoistapauksen ja siten myös ensin mainitun hajotelman olemassaolo induktioperiaatteella.

a) Todista, että hajotelma voidaan muodostaa 2×2 -matriisille eli että

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Lihavoitujen matriisien alaindeksit viittavat yllä ja alla matriisien dimensioihin. (Vihje: Causchy–Schwarz -epäyhtälö eli $\mathsf{Var}(Y) \geq [\mathsf{Cov}(X,Y)]^2/\mathsf{Var}(X)$.)

b) Todista, että hajotelma voidaan muodostaa $n \times n$ -matriisille olettaen, että se pätee $(n-1) \times (n-1)$ -matriisille:

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{n-1}\mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{B}'_n\mathbf{B}_n,$$

jossa $a_{nn} > 0$, $n > 2$ ja muut merkinnät ovat ilmeiset.

(Vihje1: Todistus kuten a)-kohdassa. Todista siis, että on olemassa vaaditunlainen matriisi $\mathbf{B}_n$ muotoa

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}' & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vihje2: Epäyhtälön $a_{nn} > \mathbf{b}'\mathbf{b}$ todistamisessa auttaa huomata, että HT:n 5.1 a)-kohdan mukaan ositetun käänteismatriisin kaakkoisalkio on $(\mathbf{C} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$.)

4. Kirjan sivulla 113 hyödynnetään tulosta (s:lta 105), että jos positiivisesti definiittien matriisien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ erotus $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ on positiivisesti definiitti, niin myös käänteismatriisien erotus $\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}$ on positiivisesti definiitti. Todistetaan se.

a) Olkoon matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti. Osoita, että on olemassa matriisi $\mathbf{R}$, jolle pätee $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$. (Vihje: Positiivisesti definiitillä matriisilla on pääakseliesitys $\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}'$, jossa $\boldsymbol{\Lambda}$ on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ($\lambda_i > 0$; perustele) ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot ja matriisin $\mathbf{S}$ sarakkeet ovat niihin liittyviä ortogonaalisia ominaisvektoreita ja $\mathbf{S}'\mathbf{S} = \mathbf{I}$.)

b) Osoita, että jos matriisi $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti, niin myös matriisi $\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}$ on positiivisesti definiitti. (Vihje1: $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{R}^{-1})^2$, $\mathbf{R}^{-1}$ on symmetrinen ja $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$ (perustele väitteet). Vihje2: Sijoita $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$ (perustele) neliömuotoon $\mathbf{x}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}$, jossa $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$.)

c) Osoita b)-kohdan avulla, että jos erotus $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ on positiivisesti definiitti, niin myös erotus $\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}$ on positiivisesti definiitti. (Vihje1: Jos matriisi $\mathbf{A}$ on positiivisesti definiitti ja matriisi $\mathbf{B}$ on täyttä sarakeastetta (ja matriisien dimensiot ovat sopivia), niin matriisi $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}'$ on positiivisesti definiitti. (Kirjan s. 99.) Vihje2: Tarkastele matriisin $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{R}^{-1})'$ definiittisyyttä, sovella b)-kohtaa ja kerro saamasi lauseke molemmilta puolilta $\mathbf{R}^{-1}$:llä.)