REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 11 (pe 2.12.)

1. Tutkitaan epälineaarista regressiomallia

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{u}, \tag{1}$$

jossa $\boldsymbol{\beta}_1$ ja $\boldsymbol{\beta}_2$ ovat k_1- ja k_2-vektoreita, $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$ on regressiofunktio ja jäännös $\mathbf{u} \sim \mathsf{IID}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$. Olkoon nollahypoteesi, että $\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$ eli että malli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0}) + \mathbf{u} \tag{2}$$

ja vastahypoteesi malli (1), jossa $\boldsymbol{\beta}_2 \neq \mathbf{0}$. Osoita, että regressioiden (1) ja (2) perusteella lasketun F-testisuureen

$$F_{\boldsymbol{\beta}_2} = \frac{(\mathsf{RSSR} - \mathsf{USSR})/k_2}{\mathsf{USSR}/k_2} \tag{6.70}$$

ja Gauss–Newton (GN) -regressioiden

$$\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}} = \acute{\mathbf{X}}_1\mathbf{b}_1 + \textbf{residuaalit} \tag{6.80}$$

ja

$$\mathbf{y} - \acute{\mathbf{x}} = \acute{\mathbf{X}}_1\mathbf{b}_1 + \acute{\mathbf{X}}_2\mathbf{b}_2 + \textbf{residuaalit} \tag{6.81}$$

(kirjan merkinnöillä) perusteella lasketun vastaavan F-testisuureen jakaumat ovat asymptoottisesti samat. (Vihje: Kirjan kaava (6.40), jonka mukaan mallin (1) PNS-residuaaleille pätee $\hat{\mathbf{u}} \overset{a}{=} \mathbf{M}_1\mathbf{u}$.)

2. Pohditaan lineaarisen mallin jäännöksen autokorrelaation testaamista. Nollahypoteesin mukainen malli on

$$y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \tag{3}$$

jossa $u_t \sim \mathsf{IID}(0,\sigma^2)$ (kirjan merkinnöin). Vastahypoteesin mukaan jäännös noudattaa 2. asteen autoregressiivistä prosessia

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t,$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{IID}(0,\sigma_\varepsilon^2)$. Perustele huolellisesti, että nollahypoteesia voidaan testata GN-regressiolla (kirjan yhtälö (6.85))

$$\tilde{u}_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + b_{\rho_1}\tilde{u}_{t-1} + b_{\rho_2}\tilde{u}_{t-2},$$

jossa $\tilde{u}_t$ on PNS-residuaali regressiosta (3).

3. Tutkittava malli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{u}, \tag{4}$$

jossa $\boldsymbol{\beta}$ on k-vektori, $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})$ on regressiofunktio, $\mathsf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ja $\mathsf{E}(\mathbf{uu}') = \boldsymbol{\Omega}$, jossa $\boldsymbol{\Omega}$ on positiivisesti definiitti matriisi. Yleistetty epälineaarinen PNS-estimaattori ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}$) minimoi lausekkeen

$$[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]\boldsymbol{\Omega}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})]. \tag{7.13}$$

a) Osoita, että $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}$ toteuttaa yhtälöt

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Omega}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}. \tag{7.14}$$

b) Osoita, että lineaarisen regressiofunktion $\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ($\mathbf{X}$ on täysiasteinen $n \times k$ -matriisi) tilanteessa

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}. \tag{7.04}$$

4. Tutkitaan lineaarista mallia

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \tag{5}$$

jossa $\mathsf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $\mathsf{E}(\mathbf{uu}') = \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2\mathbf{I}$ on positiivisesti definiitti kovarianssimatriisi, $\mathbf{X}$ on eksogeeninen täysiasteinen $n \times k$ -matriisi ($k \geq 1$) ja $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ldots \beta_k]'$ on $k \times 1$ -vektori. Estimoidaan mallin (4) parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ PNS:llä ($\hat{\boldsymbol{\beta}}$), yleistetyllä PNS:llä ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}$) ja momenttimenetelmällä ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}$). Estimaattorit ovat

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y},$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} \tag{7.04}$$

ja

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}} = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}. \tag{7.08}$$

Yllä $\mathbf{W}$ on eksogeeninen täysiasteinen $n \times k$ -matriisi.

a) Perustele, että estimaattorit yllä ovat kaikki MM-estimaattoreita.

b) Osoita, että estimaattoreiden kovarianssimatriisit ovat

$$\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

$$\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{Y}}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

ja

$$\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}) = (\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{W}(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1}.$$

c) Osoita, että yleistetty PNS-estimaattori on aina vähintään yhtä tehokas kuin MM-estimaattori eli että matriisi

$$(\mathbf{W}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{\Omega}\mathbf{W}(\mathbf{X}'\mathbf{W})^{-1} - (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

on positiivisesti semidefiniitti matriisi. (Vihje1: HT 5.4 ja kirjan kaava (7.11). Vihje2: Käytä kirjan kaavan (7.02) hajotelmaa $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}'$. Vihje3: Esitä johtamasi matriisi muodossa $\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{Z}$, jossa $\mathbf{Z}$ on $n \times k$ -matriisi ja $\mathbf{M}$ on $n \times n$ -projektiomatriisi ja argumentoi kirjan sivujen 113 ja 223 tapaan.)

d) Kannattaako empiirikon siten unohtaa PNS-estimaattori ja käyttää aina yleistettyä PNS-estimaattoria, kun estimoitava malli on (5)?!