REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 1 (to 22.9.)

1. Harjoitellaan matriisimuodossa annettujen yhtälöiden derivointia. Määritellään käsitteitä: Olkoon $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ $k \times 1$ -vektori, jonka argumentti $\mathbf{x}$ on $l \times 1$ -vektori. Tällöin

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \end{bmatrix},$$

joka on $k \times l$ -matriisi ja jossa on merkintöjen yksinkertaistamiseksi häivytetty $\mathbf{y}(\mathbf{x})$:n riippuvuus $\mathbf{x}$:stä. Yllä olevan matriisin transpoosi on $l \times k$ -matriisi

$$\frac{\partial \mathbf{y}'}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'}\right)' = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_l} & \cdots & \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

a) Olkoot $\boldsymbol{\beta}$ $(m \times 1)$, $\mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})$ $(n \times 1)$ ja $\mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})$ $(p \times 1)$ vektoreita ja $\mathbf{A}$ $(n \times p)$ matriisi (joka ei riipu $\boldsymbol{\beta}$:sta). Osoita, että

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}\mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}'\frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{c}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'}. \tag{2}$$

b) Olkoot vektorin $\boldsymbol{\beta}$ ja matriisin $\mathbf{A}$ (joka ei riipu $\boldsymbol{\beta}$:sta) dimensiot $n \times 1$ ja $m \times n$. Osoita, että

$$\frac{\partial (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{A}$$

ja

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}')}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}'.$$

c) Olkoot $\boldsymbol{\beta}$-vektorin ja $\mathbf{A}$-matriisin (joka ei riipu $\boldsymbol{\beta}$:sta) dimensiot $m \times 1$ ja $m \times m$. Osoita, että

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{A}' + \mathbf{A})$$

ja

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\boldsymbol{\beta}.$$

2. Regressiomalli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},$$

jossa $\mathbf{y}$ on selitettävä $n \times 1$ -vektori, $\boldsymbol{\beta}$ on $k \times 1$ -parametrivektori, $\mathbf{X}$ on täysiasteinen $n \times k$ -matriisi ja $\mathbf{u}$ on jäännösvektori (n on havaintojen lukumäärä ja k selittävien muuttujien lukumäärä). Estimoidaan $\boldsymbol{\beta}$ pienimmän neliösumman (PNS) -menetelmällä eli minimoimalla jäännösneliösummaa

$$\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Johda normaaliyhtälöt (2.15)

$$\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0},$$

toisen kertaluvun ehto

$$\frac{\partial^2 \mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}$$

ja PNS-estimaattori

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

3. Ositetaan matriisi $\mathbf{A}$ ($m \times n$) alimatriiseihin $\mathbf{A}_{ij}$ ($m_i \times n_j$, $i = 1, \ldots, q$ ja $j = 1, \ldots, p$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} \end{bmatrix}.$$

Yllä $\sum_{i=1}^{q} m_i = m$ ja $\sum_{j=1}^{p} n_j = n$. Osoitetaan, että ositettujen matriisien yhteenlasku-, transponointi- ja kertolaskusäännöt ovat hyvin samanlaiset kuin osittamattomien matriisien vastaavat säännöt.

a) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ myös dimensioltaan $m \times n$ ja ositettu vastaaviin alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$. Osoita, että

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} + \mathbf{B}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} + \mathbf{B}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} + \mathbf{B}_{qp} \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}' & \cdots & \mathbf{A}_{q1}' \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1p}' & \cdots & \mathbf{A}_{qp}' \end{bmatrix}.$$

b) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ $(n \times r)$ ositettu alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$ $(n_i \times r_j, \sum_{j=1}^{s} r_j = r)$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{ps} \end{bmatrix}.$$

Osoita, että

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{ks} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{ks} \end{bmatrix}.$$

4.
a) Osoita, että

$$\mathbf{P_X X} = \mathbf{P_X}\,[\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k] = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k] = \mathbf{X},$$

jossa $\mathbf{P_X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ (kirjan s. 57). Tulkitse tulos geometrisesti.

5. Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti ja $\mathbf{B}$ $(n \times k)$ astetta k $(k \leq n)$ oleva matriisi. Osoita, että $\mathbf{B}'\mathbf{AB}$ on positiivisesti definiitti ja siten epäsingulaarinen matriisi. (Voit vedota luennolla esitettyihin todistuksiin.)