REGRESSIOANALYYSIN JATKOKURSSI, 5–10 OP (aine- ja syventävät opinnot). 15.9.–16.12.2011. Kirjallisuus: Russell Davidson ja James MacKinnon: Econometric Theory and Methods. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitukset 10 (pe 25.11.)

1. Epälineaariseen regressiomalliin liittyvän F-testisuureen asymptoottisen jakauman johto perustuu tulokseen, että testisuureen osoittaja (kerrottuna r:llä) on suurilla havaintomäärillä oleellisesti

$$\mathbf{u}'\mathbf{M}_0\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{M}_1\mathbf{u}$$

(kirjan s. 243). Todista, että vastaava tulos pätee eksaktisti lineaarisen regressiomallin tilanteessa. (Vihje: Todistus on lyhyt!)

2. Epälineaariseen regressiomalliin liittyvän F-testisuureen asymptoottista jakaumaa johdettaessa (kirjan s. 244) viitataan tulokseen, että

$$\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$$

on ortogonaalinen projektiomatriisi.[6] (Huomaa merkintöjen yhteys s:n 244 merkintöihin.) Yllä matriisi $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2]$ on täysiasteinen $n \times k$ -matriisi ($n > k = k_1 + k_2$) ja $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat $n \times k_1$ ja $n \times k_2$ -matriiseja (k_1,$k_2 \geq 1$).

a) Todista, että $\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$ on ortogonaalinen projektiomatriisi eli että se on symmetrinen ja idempotentti.

b) Todista, että avaruus, johon $\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$ projisoi, on dimensioltaan k_2. (Vihje1: HT 5.2. Vihje2: Pohdi, mikä on matriisin $\mathbf{P_X} - \mathbf{P}_1$ aste. Vihje 3: $\mathsf{r}(\mathbf{AB}) = \min\{\mathsf{r}(\mathbf{A}), \mathsf{r}(\mathbf{B})\}$. Vihje 4: $\mathsf{r}(\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2) = k_2$, sillä ei voi olla $n - k_1 < k_2$ (perustele).)

3. Kirjan sivulla 246 viitataan tulokseen, jonka mukaan lineaarisen regressiomallin

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}$$

parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}_2$ PNS-estimaattorin kovarianssimatriisi on

$$\mathsf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \sigma^2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}.$$

Yllä $\boldsymbol{\beta}_1$ ja $\boldsymbol{\beta}_2$ ovat $k_1 \times 1$ ja $k_2 \times 1$ -vektoreita, $\mathbf{X}_1$ ja $\mathbf{X}_2$ ovat eksogeenisista selittäjistä koostuvia $n \times k_1$ ja $n \times k_2$ -matriiseja (k_1,$k_2 \geq 1$), $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2]$ on täysiasteinen $n \times k$ -matriisi ($n > k = k_1 + k_2$) ja $\mathbf{u} \sim \mathsf{IID}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Todista tulos. (Vihje: HT 5.1 b).)

[6] Projektiomatriisi $\mathbf{P}$ on ortogonaalinen, mikäli se projisoi avaruuteen, joka on ortogonaalinen suhteessa avaruuteen, johon matriisi $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ projisoi. Ortogonaaliset projektiomatriisit ovat symmetrisiä ja idempotentteja. Mikäli matriisi on idempotentti muttei symmetrinen, se on projektiomatriisi muttei ortogonaalinen sellainen.

4. Olkoon $\hat{\theta}$ (skalaari) $\sqrt{n}$-tarkentuva estimaattori (root-n consistent; kirjan s. 191) estimaattori θ:lle, ja olkoon $g(\theta)$ epälineaarinen funktio θ:sta. Approksimoidaan $g(\hat{\theta})$:aa θ:n todellisen arvon θ_0 ympärillä 2. asteen Taylor-kehitelmällä

$$g(\hat{\theta}) \approx g(\theta_0) + g'(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0) + \frac{1}{2}g''(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^2.$$

Selitä, miksi viimeinen termi on asymptoottisesti merkityksettömän pieni edelliseen termiin verrattuna.