Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, kevät 2015

Harjoitus 6

1. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää
$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$
jossa $\boldsymbol{y}$ on $n \times 1$ vektori, $\boldsymbol{b}$ on $m \times 1$ vektori ja $\boldsymbol{D}$ on $m \times n$ matriisi, jossa $d_{ij} = (\boldsymbol{D})_{ij} = 0$ kaikilla $i \neq j$. Osoita, että yhtälöryhmät ovat konsistentteja ja ratkaise yhtälöryhmät tapauksissa

   a) $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Delta}$,

   b) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}$,

   kun $\boldsymbol{\Delta}$ on ei-singulaarinen diagonaalimatriisi.

2. Olkoon $\boldsymbol{A}$ $m \times n$ matriisi, $\boldsymbol{x}$ $n \times 1$ vektori ja $\boldsymbol{c}$ $m \times 1$ vektori. Halutaan ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \tag{2}$$
vektorin $\boldsymbol{x}$ suhteen. Olkoon $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}'$ matriisin $\boldsymbol{A}$ singulaariarvohajotelma.

   a) Osoita, että yhtälöryhmä (2) voidaan kirjoittaa muodossa (1).
   Vihje: Kerro yhtälö puolittain matriisilla $\boldsymbol{P}'$ ja käytä singulaariarvohajotelmaa.

   b) Osoita, että jos $\boldsymbol{y}$ on yhtälöryhmän (1) ratkaisu, niin $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ on yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

   c) Ratkaise yhtälöryhmä (2) tapauksissa $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Delta}$ ja $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}$.

3. Olkoon $\{\boldsymbol{x}_{11}, \ldots \boldsymbol{x}_{1n_1}\}, \{\boldsymbol{x}_{21}, \ldots \boldsymbol{x}_{2n_2}\}, \ldots, \{\boldsymbol{x}_{k1}, \ldots \boldsymbol{x}_{kn_k}\}$ riippumattomia satunnaisotoksia m-ulotteisesta normaalijakaumasta. Otoksen i ($i = 1, \ldots, k$) havainnot tulevat jakaumasta $N_m(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Omega})$. Havaintoja vastaava uskottavuusfunktio on nyt
$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i} (2\pi)^{-m/2} |\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i) \right\}.$$
ja log-uskottavuusfunktio on
$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left[-\frac{m}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Omega}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i) \right].$$
Johda odotusarvovektoreiden $\boldsymbol{\mu}_i$, $i = 1, \ldots, k$, suurimman uskottavuuden estimaatit derivoimalla log-uskottavuusfunktio odotusarvovektorien suhteen ja asettamalla derivaatat nolliksi.