

Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, kevät 2015

Harjoitus 5

1. Tarkastellaan singulaarista matriisia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Johda matriisille \mathbf{A} yleistetty käänteismatriisi singulaariarvohajotelman avulla. Näytä, että saatu matriisi toteuttaa luentomonisteen määritelmän 17 ehdon. Voit kokeilla myös R-ohjelmiston pakkauksen MASS funktiota `ginv`. Funktiolla `ginv` voi laskea matriisin Mooren-Penrosen yleistetyn käänteismatriisin.

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

jossa jokainen alimatriisi on $m \times m$ neliömatriisi ja matriisit \mathbf{A}_{12} ja \mathbf{A}_{21} ovat ei-singulaarisia. Matriisin \mathbf{A} käänteismatriisille

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

pätee

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}.$$

Johda matriisin \mathbf{A} käänteismatriisin lauseke ratkaisemalla edellä saatu matriisiryhmä matriisien \mathbf{B}_{11} , \mathbf{B}_{12} , \mathbf{B}_{21} ja \mathbf{B}_{22} suhteen.

3. Laske seuraavat determinantit:

(a) $|\mathbf{I}_{10} + \mathbf{1}_{10}\mathbf{1}'_{10}|$

(b) $\begin{vmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$

4. Osoita, että matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

on positiivisesti definiitti käyttämällä luentomonisteen lausetta 34.

5. Olkoon

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

jossa matriisit \mathbf{A} , \mathbf{D} ja \mathbf{F} ovat ei-singulaarisia neliömatriiseja. Laske matriisin \mathbf{G} käänteismatriisi.