Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, kevät 2015

Harjoitus 4

1. Olkoon
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
symmetrinen positiivisesti definiitti 2×2 matriisi. Johda matriisin $\boldsymbol{A}$ (yksikäsitteinen) Choleskyn hajotelma
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}',$$
jossa
$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ a_{21}/\sqrt{a_{11}} & \sqrt{a_{22} - a_{21}^2/a_{11}} \end{pmatrix}.$$
Näytä, että edellä oleva hajotelma on määritelty ainoastaan silloin kun $a_{11} > 0$ ja $|\boldsymbol{A}| \geq 0$.

   Vihje: Asettamalla
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}'$$
saadaan kolmen yhtälön yhtälöryhmä, joka ratkaistaan $\boldsymbol{T}$:n alkioiden t_{11}, t_{21} ja t_{22} suhteen.

2. Osoita, että matriisi
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
on positiivisesti semidefiniitti ja osoita, että sen Choleskyn hajotelma ei ole yksikäsitteinen.

   Vihje: Ratkaise yhtälöryhmä kuten edellisessä tehtävässä.

3. Olkoon $\boldsymbol{x} \sim N_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Omega})$, jossa
$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Etsi 2×2 matriisi $\boldsymbol{A}$, jolla satunnaisvektorin $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ alkiot ovat riippumattomia.

4. Muodosta aineisto ottamalla jakaumasta
$$N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$n = 10$ havaintovektoria $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{10}$. Etsi

(a) symmetrinen 2×2 matriisi $\boldsymbol{B}$,

(b) 2×2 alakolmiomatriisi $\boldsymbol{B}$,

jolla alkuperäisistä havaintovektoreista laskettujen lineaarimuunnosten $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, 10$ otoskovarianssimatriisi on identiteettimatriisi $\boldsymbol{I}_2$.

5. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Näytä, että matriisin $\boldsymbol{A}$ singulaariarvohajotelma yksinkertaistuu muotoon

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \Delta \boldsymbol{Q}_1,$$

jossa $\boldsymbol{P}_1$ on matriisin $\boldsymbol{P}$ ensimmäinen sarake, $\boldsymbol{Q}_1$ on matriisin $\boldsymbol{Q}$ ensimmäinen sarake ja skalaari $\boldsymbol{\Delta}$ on matriisin $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ positiivisen ominaisarvon neliöjuuri. Laske käsin ja/tai R-ohjelmiston avulla matriisin $\boldsymbol{A}$ singulaariarvohajotelma.

Avuksi:

```
> library(mvtnorm)
```

R-pakkauksessa `mvtnorm` on moniulotteiseen t- ja normaalijakaumaan liittyviä R-funktioita. Esimerkiksi funktiolla `rmvnorm` voi ottaa satunnaisotoksia moniulotteisesta normaalijakaumasta.

```
> Sigma<-matrix(c(1,0.5,0.5,1),2,2)
> X<-rmvnorm(50,mean=c(1,2),sigma=Sigma)
```

Matriisin `X` riveinä on 50 havaintovektoria jakaumasta

$$N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

```
> S<-cov(X)  #Aineiston X otoskovarianssimatriisi
> solve(S)   #S:n kaanteismatriisi S^(-1)

> ev<-eigen(S)
> ev$values    #S:n ominaisarvot ja
> ev$vectors   #vastaavat ominaisvektorit
> diag(ev$values) #Diagonaalimatriisi, jonka paadiagonaalilla
                  #S:n ominaisarvot
```

```
> diag(sqrt(ev$values)) #Diagonaalimatriisi, jonka
                        #paadiagonaalilla S:n ominaisarvojen
                        #neliojuuret
> A<-ev$vectors%*%diag(sqrt(ev$values))%*%t(ev$vectors)
> solve(A)%*%S%*%t(solve(A))
> svd(B)   #Matriisin B singulaariarvohajotelma
> ?svd
> P<-svd(A)$u
> Q<-svd(A)$v
> D<-diag(svd(A)$d)
> P%*%D%*%t(Q)
```

Huom! $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}^{-1})' = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_2$.

```
> V<-chol(S)     #Antaa ylakolmiomatriisin V, jolla S=V'V.

> T<-t(chol(S))  #Transpoosin avulla saadaan alakolmiomatriisi T,
                 #jolla S=TT'.

> solve(T)%*%S%*%t(solve(T))  #T^(-1)S(T^(-1))'=I_2
```

Huom! $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}^{-1})' = \boldsymbol{I}_2$.

Symmetrinen matriisi $\boldsymbol{A}$ on matriisin $\boldsymbol{S}$ neliöjuurimatriisi $\boldsymbol{S}^{1/2}$, jolla

$$\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{S}^{1/2} = \boldsymbol{S}$$

ja alakolmiomatriisi $\boldsymbol{T}$ on matriisin $\boldsymbol{S}$ neliöjuurimatriisi $\boldsymbol{S}_*^{1/2}$, jolla

$$\boldsymbol{S}_*^{1/2}(\boldsymbol{S}_*^{1/2})' = \boldsymbol{S}.$$