Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, kevät 2015

Harjoitus 3

1. Laske seuraavien matriisien ominaisarvot ja ominaisvektorit:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \ \text{ ja } \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Voit tarkistaa tulokset käyttämällä R-ohjelmiston funktiota `eigen`.

   Vihje: Näytä, että matriisin $\boldsymbol{C}$ tapauksessa karakteristinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0$.

2. Näytä, että yläkolmiomatriisin

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{pp} \end{pmatrix}$$

   diagonaaliarviot ovat samalla myös matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvot (Lause 14 (c)).

3. Näytä, että neliömatriiseilla $\boldsymbol{BAB}^{-1}$ ja $\boldsymbol{A}$ on samat ominaisarvot, jos $\boldsymbol{B}$ on ei-singulaarinen neliömatriisi (Lause 14 (d)).

   Vihje: Determinantin laskusäännöt. $\boldsymbol{BIB}^{-1} = \boldsymbol{I}$.

4. Laske seuraavien symmetristen neliömatriisien aste käyttämällä ominaisarvoja.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \mathbf{1}_3\mathbf{1}_3' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Laske matriisin

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   ominaisarvot ja sen riippumattomien sarakkeiden lukumäärä. Kommentoi tulosta.

6. (a) Tarkastellaan symmetristä 2×2 matriisia

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Näytä, että $\boldsymbol{A}$ on ortogonaalinen ja laske sen ominaisarvot.

(b) Näytä, että symmetrisellä ortogonaalisella $n \times n$ matriisilla ominaisarvon itseisarvo on aina 1 eli $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$.

7. Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Näytä, että symmetrisen matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 3$. (Matriisilla on siis kaksi yhtä suurta ominaisarvoa!)

(b) Laske matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvoja $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 3$ vastaavat normeeratut ominaisvektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$.

(c) Etsi sellaiset matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvoa 6 vastaavat ominaisvektorit $\boldsymbol{u}_1$ ja $\boldsymbol{u}_2$, jotka ovat ortogonaalisia toisiaan vastaan. Totea, että saadut ominaisvektorit ovat ortogonaalisia myös ominaisvektoria $\boldsymbol{u}_3$ vastaan.