Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, kevät 2015

Harjoitus 2

1. Olkoon
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}.$$
   a) Laske $\boldsymbol{A}^{-1}$ ja osoita, että $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_2$.
   b) Laske $\boldsymbol{B}^{-1}$ ja osoita, että $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}_2$.
   c) Laske $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}$.

2. Olkoon
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   Laske $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. Olkoon
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   a) Laske $\boldsymbol{A}^{-1}$.
   b) Laske $\boldsymbol{B}^{-1}$.

4. Osoita, että
   a) $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^{-1}$.
   b) $(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

   Edellä oletetaan, että käänteismatriisit ovat olemassa ja laskutoimitukset ovat määriteltyjä.

5. Mitkä seuraavista vektorijoukoista ovat lineaarisesti riippuvia?
   a) $\{(1,-1,2)', (3,1,1)'\}$.
   b) $\{(4,-1,2)', (3,2,3)', (2,5,4)'\}$.
   c) $\{(1,2,3)', (2,3,1)', (-1,1,1)'\}$.
   d) $\{(1,-1,1)', (2,4,3)', (3,3,5), (7,0,-1)'\}$.

6. Olkoon $\boldsymbol{x}_1$ ja $\boldsymbol{x}_2$ lineaarisesti riippumattomia ja olkoon $\boldsymbol{y}_1 = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{y}_2 = c\boldsymbol{x}_1 + d\boldsymbol{x}_2$. Osoita, että $\boldsymbol{y}_1$ ja $\boldsymbol{y}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomia jos ja vain jos $ad \neq bc$.

7. Olkoon S vektoriavaruus, jonka virittää vektorit $\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 3)'$ ja $\boldsymbol{x}_2 = (1, 1, -1)'$. Etsi vektoriavaruuden S piste, joka on lähimpänä pistettä $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)'$ (eli vektorin $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)'$ projektio vektoriavaruudelle S).