

Matriisilaskentaa tilastotieteilijälle, kevät 2015

Harjoitus 1, viikko 12

1. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Laske seuraavat matriisitulot (jos mahdollista)

(a) \mathbf{AB}

(b) \mathbf{AC}

(c) \mathbf{BC}

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske (jos mahdollista)

(a) $\text{tr}(\mathbf{D})$

(b) $\text{tr}(\mathbf{BA})$

(c) $\text{tr}(\mathbf{AB})$

3. Osoita, että neliömatriiseille \mathbf{A} ($m \times m$) ja \mathbf{B} ($n \times n$) pätee, että

$$\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{B}),$$

jossa $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ on matriisien \mathbf{A} ja \mathbf{B} Kroneckerin tulo, ts.

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mm}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Huom! Kroneckerin tuloon törmää esimerkiksi seuraavassa tilanteessa. Tarkastellaan $n \times p$ matriisia

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_n \end{pmatrix},$$

jossa $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ovat riippumattomia $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -jakautuneita satunnaisvektoreita. Tällöin

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \sim N_{np}(\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}).$$

4. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske

- (a) $|\mathbf{A}|$
 - (b) $|10\mathbf{A}|$
 - (c) $|\mathbf{B}|$
 - (d) $|\mathbf{AB}|$
 - (e) $|\mathbf{BA}|$
 - (f) $|\mathbf{C}|$
 - (g) $|\mathbf{C}'|$
5. (a) Laske tehtävät 1, 2 ja 4 numeerisesti käyttämällä R-ohjelmistoa (tai vaihtoehtoisesti jotain muuta ohjelmistoa).
- (b) Voidaan osoittaa, että neliömatriiseille \mathbf{A} ($m \times m$) ja \mathbf{B} ($n \times n$) pätee, että

$$|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^n |\mathbf{B}|^m.$$

Näytä numeerisesti (esimerkiksi R-ohjelmiston avulla), että edellinen tulos pätee tehtävän 4 matriiseille \mathbf{B} ja \mathbf{C} . Mikä on tehtävän 3 satunnaisvektorin \mathbf{y} kovarianssimatriisin $\mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}$ determinantti?

Liite: R-komentoja

```
> A<-matrix(c(1,2,3,4,5,6),3,2) #Muodostetaan 3X2 matriisi A
> A
      [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    2    5
[3,]    3    6
> B<-matrix(c(1,2,3,4),2,2)      #Muodostetaan 2X2 matriisi B
> B
      [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
> 5*B          #Matriisi B kerrottuna skalaarilla 5
      [,1] [,2]
[1,]    5   15
[2,]   10   20
> t(B)         #Matriisin B transpoosi
      [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> A%*%B        #Matriisien A ja B matriisitulo
      [,1] [,2]
[1,]    9   19
[2,]   12   26
[3,]   15   33
> det(B)      #Matriisin B determinantti
[1] -2
> kronecker(A,B) #Matriisien A ja B Kroneckerin tulo
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    3    4   12
[2,]    2    4    8   16
[3,]    2    6    5   15
[4,]    4    8   10   20
[5,]    3    9    6   18
[6,]    6   12   12   24
>
```