Lineaariset mallit, kevät 2014
Ratkaisut 5
Juho Leppänen

1. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävälle 4. Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ ottamalla ehto $\mu_1 = \mu_2$ huomioon mallissa ja estimoimalla saadun mallin parametrit (eli käyttäen olennaisesti yhtälöön (2.9) perustuvaa vaihtoehtoista menettelyä).

Ratkaisu. Tarkasteltavan mallin matriisiesitys on

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1}$$

Rajoite $\mu_1 = \mu_2$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \phi,$$

missä $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}'$ ja $\phi \in \mathbb{R}$. Kun tämä sijoitetaan malliyhtälöön (1), päädytään lineaariseen malliin

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \phi + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}_n \phi + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Tässä mallissa parametrin ϕ PNS-estimaatti on $\hat{\phi} = (\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n'\boldsymbol{y} = (1/n)\sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$. Täten SU-estimaattorin invarianssiominaisuuden nojalla rajoitetun mallin PNS-estimaatille $\hat{\boldsymbol{\mu}}_H$ pätee

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\phi} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y} \end{bmatrix}.$$

2. Jatkoa harjoituksen 4 tehtävälle 3. Estimoi parametri $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1' \ \boldsymbol{\beta}_2']'$ ehdolla $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ PNS-menetelmän avulla. Mikä on nyt estimaattorin jakauma?

Ratkaisu. Muistamme, että tarkasteltavan mallin matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix},$$

missä $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_{n_i}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_{n_i})$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > 0, \mathrm{r}(\boldsymbol{X}_i) = p$, kun $i = 1, 2$. Käytetään rajoitetun PNS-estimaatin selvittämiseen materiaalin yhtälöön (2.9) perustuvaa tapaa. Ehto $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ voidaan lausua muodossa

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi},$$

missä $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^p$ (siis monisteen merkinnöin valitaan $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix}'$). Kun tämä rajoite sijoitetaan malliyhtälöön, päädytään lineaariseen malliin

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}.$$

Normaaliyhtälöiden ratkaisukaava tuottaa tämän mallin PNS-estimaatiksi

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}} &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2). \end{aligned}$$

Lauseen 2.1 nojalla vastaavalla estimaattorilla $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ on p-ulotteinen multinormaalijakauma odotusarvovektorilla $E(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = \boldsymbol{\phi}$ ja kovarianssimatriisilla

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = \sigma^2 \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \sigma^2(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}$$

SU-estimaattorin invarianssiominaisuuden perusteella rajoitetun mallin PNS-estimaatiksi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ saadaan siis

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2) \\ (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2) \end{bmatrix}.$$

Vastaavalle estimaattorille on voimassa:

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} E(\hat{\boldsymbol{\phi}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\beta}, \\ Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} Cov(\hat{\boldsymbol{\phi}}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \sigma^2(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} & (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} & (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

PNS-estimaattorilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ on ($2p$-ulotteinen) multinormaalijakauma, koska $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ saadaan lineaarisena muunnoksena multinormaalijakautuneesta satunnaisvektorista $\hat{\boldsymbol{\phi}}$; tosin tämä jakauma on singulaarinen ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$:n kovarianssimatriisi ei ole positiivisesti definiitti).

3. Jatkoa harjoitustehtäville 4.3 ja 5.2. Johda F-testi hypoteesille $H : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$. (Vihje: Käytä F-testisuureen jälkimmäistä residuaalineliösummiin perustuvaa esitystä (ks. s. 19).)

Ratkaisu. Otetaan käyttöön merkinnät

$$\begin{aligned} S_1(\boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\alpha}), \\ S_2(\boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\alpha})'(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

kun $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$. F-testisuureen residuaalineliösummiin perustuvaa esitystä varten on siis määritettävä $S(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ ja $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H)$. Aiemmin on laskettu, että

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1 \\ (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \underbrace{(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2)}_{=\hat{\boldsymbol{\phi}}}.$$

Merkitään lisäksi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1$ ja $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2$, jolloin

$$\begin{aligned} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{bmatrix} \right)' \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)' & (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)'(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = S_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + S_2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_H)'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \right)' \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \right) \\ &= (\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\phi}})'(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\phi}}) + (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\phi}})'(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\phi}}) = S_1(\hat{\boldsymbol{\phi}}) + S_2(\hat{\boldsymbol{\phi}}). \end{aligned}$$

Hypoteesi $H : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ voidaan kirjoittaa muodossa $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{c}$, kun valitaan $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{I}_p \end{bmatrix}$. Tässä $r(\boldsymbol{A}) = p$. Täten F-testisuure saa muodon

$$\begin{aligned} F &= \frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \frac{S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) - S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{S(\hat{\boldsymbol{\beta}})} = \frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \frac{S_1(\hat{\boldsymbol{\phi}}) - S_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + S_2(\hat{\boldsymbol{\phi}}) - S_2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)}{S_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + S_2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)} \\ &\overset{H}{\sim} F_{p, n_1+n_2-2p}. \end{aligned}$$

4. Jatkoa harjoitustehtäville 4.3, 5.2 ja 5.3. (i) Muodosta $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}_1$ lineaarikombinaatiolle $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ ($\boldsymbol{a} = [a_1 \cdots a_p]' \neq \boldsymbol{0}$). (ii) Tee sama olettaen, että $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$.

Ratkaisu. (i) Lineaarikombinaatio $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ voidaan kirjoittaa muodossa $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}' & \boldsymbol{0}' \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}$ (missä $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1' & \boldsymbol{\beta}_2' \end{bmatrix}'$). Täten lineaarikombinaation $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ luottamusväli luottamustasolla $1-\alpha$ on (ks. materiaalin sivu 23)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}' & \boldsymbol{0}' \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{n_1+n_2-2p}(\alpha/2) s \sqrt{\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}' & \boldsymbol{0}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}},$$

eli

$$\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \pm t_{n_1+n_2-2p}(\alpha/2) s \sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{a}},$$

missä $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1$ ja edellisen tehtävän merkinnöin

$$
\begin{aligned}
s^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2p} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \frac{1}{n_1+n_2-2p}((\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1)'(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)'(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)) \\
&= \frac{1}{n_1+n_2-2p}(S_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) + S_2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2)).
\end{aligned}
$$

(ii) Merkitään $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\beta}_1$, jolloin yhtälön $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ pätiessä malliyhtälö on muotoa

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}
$$

ja tehtävänä on muodostaa tason $1-\alpha$ luottamusväli lineaarikombinaatiolle $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\phi}$. Siis voidaan käyttää suoraan sivun 23 luottamusvälin kaavaa malliin (2), jolloin väliksi saadaan

$$
\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{\phi}} \pm t_{n_1+n_2-p}(\alpha/2)s\sqrt{\boldsymbol{a}'\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\right)^{-1}\boldsymbol{a}},
$$

eli

$$
\boldsymbol{a}'\hat{\boldsymbol{\phi}} \pm t_{n_1+n_2-p}(\alpha/2)s\sqrt{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{a}},
$$

missä aiemmin lasketun perusteella $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2)$ ja

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n_1+n_2-p}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)'\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\
&= \frac{1}{n_1+n_2-p}((\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\phi}})'(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{X}_1\hat{\boldsymbol{\phi}}) + (\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\phi}})'(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{X}_2\hat{\boldsymbol{\phi}})) \\
&= \frac{1}{n_1+n_2-p}(S_1(\hat{\boldsymbol{\phi}}) + S_2(\hat{\boldsymbol{\phi}})).
\end{aligned}
$$

5. Tarkastellaan yhden selittäjän lineaarista regressiomallia $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$, $Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2)$. Johda F-testi nollahypoteesille $\beta_2 = 0$ ja osoita, että testisuure voidaan lausua (tavanomaisin merkinnöin) muodossa

$$
F = \hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Big/ S^2.
$$

(Vihje: Mallin matriisiesitys ja F-testisuureen yleinen lauseke (ks. monisteen s. 18). Testisuureen haetun lausekkeen johtamisessa tarvitset myös 2×2 matriisin käänteismatriisin laskukaavaa.)

Ratkaisu. Hypoteesi $\beta_2 = 0$ voidaan lausua muodossa $\boldsymbol{A\beta} = c$, kun asetetaan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $c = 0$. Siis F-testisuureen yleisessä lausekkeessa

$$
F = \frac{(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - c)'(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}')^{-1}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - c)}{qS^2},
$$

$q = 1$ ja $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - c = \hat{\beta}_2^2$. Harjoituksen 3 tehtävässä 3 laskettiin, että

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix}.$$

Täten

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2},$$

ja F-testisuureen lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$F = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{S^2} \overset{H}{\sim} F_{1,n-2},$$

missä $S^2 = (n-2)^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Harjoituksen 2 tehtävässä 4 todettiin, että

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}.$$

6. Tarkastellaan jakson 3.2 alun tilannetta (s. 19), jossa malliyhtälö on $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, \cdots, n$, ja testattava hypoteesi $H : \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$. Osoita ensin, että SSE $= (1 - R^2)\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, jossa R^2 on selitysaste ja SSE on residuaalineliösumma (ks. s. 10), ja tämän perusteella edelleen, että F-testisuure edellä mainitulle hypoteesille voidaan kirjoittaa

$$F = (n-p)R^2/(p-1)(1-R^2).$$

Ratkaisu. Muokkaamalla R^2:n määritelmästä saatua yhtälöä saadaan:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \implies \frac{SSE}{SST} = 1 - R^2 \implies SSE = (1-R^2)SST = (1-R^2)\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Koska hypoteesi $H : \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ voidaan kirjoittaa muodossa $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{p-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$, missä $r(\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{p-1} \end{bmatrix}) = p - 1$, on F-testisuureen lauseke muotoa

$$F = \frac{n-p}{p-1} \frac{S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) - S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}.$$

Materiaalin sivulla 20 on todettu, että tarkasteltavassa mallissa $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = SST$. Koska $S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = SSE$, saadaan F-tesisuureen lausekkeelle muoto

$$F = \frac{n-p}{p-1} \frac{SST - SSE}{SSE} = \frac{n-p}{p-1} \frac{1 - \frac{SSE}{SST}}{\frac{SSE}{SST}} = \frac{n-p}{p-1} \frac{R^2}{1-R^2}.$$

7. Oletetaan, että tavanomaisessa lineaarisessa mallissa $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma^2 > 0, r(\boldsymbol{X}) = p$) selittäjät ovat ortogonaalisia eli $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ on diagonaalimatriisi. Johda parametrin β_j PNS-estimaatti, t-testisuure hypoteesille $H : \beta_j = 0$ ja $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrille β_j (= $\boldsymbol{\beta}$:n j. komponentti). Miten nämä muuttuvat, jos mallista poistetaan joku selittäjistä x_k ($k \neq j$)?

Ratkaisu. Kun kirjoitetaan $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p \end{bmatrix}$, pätee selittäjien ortogonaalisuuden nojalla $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p \end{bmatrix}$. Näin ollen

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1} & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{y} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_p'\boldsymbol{x}_p} \end{bmatrix}.$$

Siis parametrin $\boldsymbol{\beta}$ yksittäisen komponentin β_j *PNS*-estimaatti on

$$\hat{\beta}_j = \frac{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}.$$

Kurssimateriaalin sivun 20 nojalla t-testisuure hypoteesille H on muotoa

$$T = \frac{\hat{\beta}_j}{S\sqrt{m^{jj}}},$$

missä m^{jj} on matriisin $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ alkio (j, j) eli tässä tapauksessa $m^{jj} = 1/(\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j)$. Siis

$$T = \frac{\hat{\beta}_j\sqrt{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}}{S} = \frac{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{Y}}{S\sqrt{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}} \overset{H}{\sim} t_{n-p},$$

missä $S^2 = (n-p)^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$. Haettu tason $1-\alpha$ luottamusväli on sivulla 23 lasketun perusteella

$$\hat{\beta}_j \pm t_{n-p}(\alpha/2)s\sqrt{m^{jj}},$$

eli

$$\frac{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j} \pm t_{n-p}(\alpha/2)s\sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j}}.$$

Ortogonaalisuuden johdosta yksittäisen komponentin β_j *PNS*-estimaatin lauseke ei muutu jos mallista poistetaan joitain selittäjiä $\boldsymbol{x}_k$, $k \neq j$. Sen sijaan selittäjien poistaminen muuttaa estimaatin s lauseketta, joten myös t-testisuureen ja tason $1-\alpha$ luottamusvälin lausekkeet muuttuvat. Lisäksi selittäjiä poistettaessa t_{n-p}-jakauman vapausaste kasvaa (koska p pienenee), jolloin luku $t_{n-p}(\alpha/2)$ luottamusvälin lausekkeessa pienenee.