Lineaariset mallit, kevät 2014
Ratkaisut 4
Juho Leppänen

1. Olkoon oikea (täysiasteinen) malli $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n), \boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}, \sigma^2 > 0$). Oletetaan, että $\boldsymbol{\beta}_1$ estimoidaan kuitenkin käyttäen mallia, josta $\boldsymbol{X}_2$ on jätetty pois (eli malliyhtälö on $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$). Laske näin saadun $\boldsymbol{\beta}_1$:n PNS-estimaattorin odotusarvo ja selvitä myös sen todennäköisyysjakauma. Milloin tämä estimaattori on harhaton?

Ratkaisu. Malliyhtälö $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$ johtaa *PNS*-estimaattiin $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{y}$. Matriisi $(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'$ on täyttä riviastetta, joten vastaavalla estimaattorilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on (epäsingulaarinen) p_1-ulotteinen multinormaalijakauma (ks. materiaalin liitteen osio A.2.4), jonka parametreja ryhdymme nyt selvittämään. Käyttämällä odotusarvon lineaarisuutta, saadaan laskettua

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'E(\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2) \\ &= (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2. \end{aligned}$$

Nähdään, että

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = \boldsymbol{\beta}_1 \iff (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

Estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ harhattomuus tarkoittaa, että ylläoleva pätee kaikilla $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$, ja tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun matriisin $\boldsymbol{X_1}$ sarakkeet ovat kohtisuorassa matriisin $\boldsymbol{X}_2$ sarakkeita vastaan. Lopuksi lasketaan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$:n kovarianssimatriisi:

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'Cov(\boldsymbol{Y})((\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}')' = (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'Cov(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1} \\ &= (\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1} = \sigma^2(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1}(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1} = \sigma^2(\boldsymbol{X_1}'\boldsymbol{X_1})^{-1}. \end{aligned}$$

2. (Jatkoa harjoituksen 2 tehtävälle 2) (i) Johda tehtävän varianssianalyysimallissa parametrien $\mu_1, \ldots, \mu_p$ PNS-estimaattien lausekkeet normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen. (ii) Johda PNS-estimaattorien odotusarvot, varianssit ja kovarianssit (eli odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi) ja osoita, että PNS-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_1 \cdots \hat{\mu}_p]'$ noudattaa multinormaalijakaumaa.

Ratkaisu. (i) Harjoituksen 2 tehtävässä 2 todettiin, että mallin matriisiesityksessä $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, on

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_p} \end{bmatrix}$$

PNS-estimaattien määrittämiseksi lasketaan

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'_{n_1}\mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1}'_{n_p}\mathbf{1}_{n_p} \end{bmatrix} = \text{diag}\begin{bmatrix} n_1 & \cdots & n_p \end{bmatrix}$$

Diagonaalimatriisin käänteismatriisi saadaan, kun korvataan diagonaalilla olevat alkiot käänteisluvuillaan. Toisin sanoen $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \text{diag}\begin{bmatrix} 1/n_1 & \cdots & 1/n_p \end{bmatrix}$. Huomataan, että PNS-estimaatin $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ kukin komponentti on vastaavan havainto-osion otoskeskiarvo:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}'_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1}'_{n_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1\bar{y}_1 \\ \vdots \\ n_p\bar{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tässä $\boldsymbol{y}_i$ tarkoittaa osavektoria $\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & \cdots & y_{in_i} \end{bmatrix}$ ja $\bar{y}_i$ tästä osavektorista muodostettua otoskeskiarvoa.

(ii) Koska $\boldsymbol{r}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}') = p$, noudattaa estimaattori $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ multinormaalijakautuneen satunnaisvektorin $\boldsymbol{Y}$ täyttä riviastetta olevana lineaarimuunnoksena multinormaalijakaumaa. Jakauman parametrit lasketaan seuraavasti:

$$E(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}) = E\begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \vdots \\ \bar{Y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\bar{Y}_1 \\ \vdots \\ E\bar{Y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} EY_{1i} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_p}\sum_{i=1}^{n_p} EY_{pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= Cov((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'Cov(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\ &= \sigma^2\text{diag}\begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_p} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Tarkastellaan kahta riippumatonta lineaarista mallia

$$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_{n_i}(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_{n_i}),\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p,\ \sigma^2 > 0,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{X}_i) = p, i = 1, 2.$$

Muodosta näistä matriiseja käyttäen yksi malli ja esitä parametrin $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1'\ \boldsymbol{\beta}_2']'$ PNS-estimaattorin lauseke. Mikä on saadun PNS-estimaattorin jakauma? Aputulos: Olkoon $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ epäsingulaarisia neliömatriiseja. Tällöin

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Halutunlainen malli saadaan muodostettua, kun kootaan osavektorit $\boldsymbol{Y}_i$ yhdeksi vektoriksi asettamalla vektorit "päällekkäin":

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_2 + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}$$

Tässä pätee $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1' & \boldsymbol{\varepsilon}_2'\end{bmatrix}' \sim N_{n_1+n_2}(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_{n_1+n_2})$. Normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen saadaan laskettua

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\\
&= \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1' & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{Y}_1\\ (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lauseen 2.1 perusteella estimaattorilla $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on ($2p$-ulotteinen) multinormaalijakauma odotusarvovektorina $\boldsymbol{\beta}$ ja kovarianssimatriisina

$$\sigma^2\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \sigma^2\begin{bmatrix}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\end{bmatrix}.$$

4. Tarkastellaan kahden riippumattoman normaalisen otoksen mallia

$$Y_1,\dots,Y_n \perp\!\!\!\perp,\ Y_i \sim \begin{cases} N(\mu_1,\sigma^2), & \text{kun } i=1,\dots,n_1\\ N(\mu_2,\sigma^2), & \text{kun } i=n_1+1,\dots,n_1+n_2=n\end{cases}$$

($\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, n_1, n_2 > 1$). Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ käyttäen monisteessa (s. 16) esitettyä rajoitetun PNS-estimaattorin kaavaa (2.8).

Ratkaisu. Ehto $\mu_1 = \mu_2$ voidaan kirjoittaa muodossa $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2\end{bmatrix}' = c$, kun valitaan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$ ja $c = 0$. Tällöin $\boldsymbol{A}$ on tietenkin täyttä riviastetta. Tarkasteltava malli on erikoistapaus tehtävän 2 mallista. Siellä lasketusta tiedetään jo, että $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix}\bar{y}_1 & \bar{y}_2\end{bmatrix}'$ ja $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix}1/n_1 & 1/n_2\end{bmatrix}$. Materiaalin kaavaa (2.8) käyttäen voidaan nyt laskea rajoitetun mallin PNS-estimaatti:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mu}}_H &= \hat{\boldsymbol{\mu}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}')^{-1}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\mu}} - c)\\
&= \begin{bmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{n_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{n_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{n_1}\\ -\frac{1}{n_2}\end{bmatrix}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{-1}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = \frac{1}{n}\left(\begin{bmatrix}n\bar{y}_1\\ n\bar{y}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}n_2(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\\ -n_1(\bar{y}_1-\bar{y}_2)\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{n}(n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_1)\mathbf{1}_2 = \bar{y}\mathbf{1}_2.
\end{aligned}$$

5. Jatkoa edelliselle. Mikä on parametrin σ^2 harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun parametrien μ_1 ja μ_2 oletetaan toteuttavan rajoite $\mu_1 = \mu_2$? Entä mikä on σ^2:n harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun μ_1 ja μ_2 ovat vapaasti vaihtelevia parametreja?

Ratkaisu. Lineaarisessa mallissa $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, parametrin σ^2 harhaton esimaattori on

$$S^2 = \frac{1}{n-p}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{n}{n-p}\hat{\sigma}^2,$$

missä p on matriisin $\boldsymbol{X}$ aste ja SU-estimaattori $\hat{\sigma}^2$ toteuttaa $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$ (ks. materiaalin lause 2.1 ja sitä seuraava keskustelu). Täten harhaton estimaattori S^2 on muotoa $S^2 = (\sigma^2/(n-p))Z$, missä $Z \sim \chi^2_{n-p}$. Palautetaan mieleen todennäköisyyslaskennasta, että jakauma χ^2_ν on sama kuin gammajakauma $Gam(\nu/2, 1/2)$. Lisäksi gammajakaumalla on ominaisuus

$$V \sim Gam(\alpha, \lambda), \;\; c > 0 \implies cV \sim Gam(\alpha, \frac{\lambda}{c})$$

Tämän ominaisuuden näkee esim. tarkastelemalla satunnaismuuttujan cV tiheysfunktiota (joka voidaan johtaa todennäköisyyslaskennasta tutun muuntokaavan avulla). Yhdistämällä nämä tiedot nähdään siis, että

$$S^2 \sim Gam\left(\frac{n-p}{2}, \frac{n-p}{2\sigma^2}\right).$$

Kun rajoite $\mu_1 = \mu_2$ sijoitetaan suoraan malliyhtälöön, päädytään riippumattoman normaaliotoksen malliin

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{1}_n \mu + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Tässä siis $p = 1$, joten edellisen tehtävän nojalla

$$S^2 = \frac{1}{n-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{1}_n\hat{\mu})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{1}_n\hat{\mu}) = \frac{1}{n-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{1}_n\bar{Y})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{1}_n\bar{Y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

Edellä todetun perusteella on lisäksi $S^2 \sim Gam((n-1)/2, \; (n-1)/2\sigma^2)$. Tehtävässä 2 todetusta nähdään, että rajoittamattomassa mallissa on voimassa $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \end{bmatrix}'$. Koska rajoittamattomassa mallissa $p = 2$, saadaan harhattomalle σ^2:n estimaattorille muoto

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-2}\left(\boldsymbol{Y} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix}\right)'\left(\boldsymbol{Y} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{n-2}\begin{bmatrix} Y_1 - \bar{Y}_1 & \cdots & Y_{n_1} - \bar{Y}_1 & Y_{n_1+1} - \bar{Y}_2 & \cdots & Y_n - \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \\ &\qquad \cdot \begin{bmatrix} Y_1 - \bar{Y}_1 & \cdots & Y_{n_1} - \bar{Y}_1 & Y_{n_1+1} - \bar{Y}_2 & \cdots & Y_n - \bar{Y}_2 \end{bmatrix}' \\ &= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i - \bar{Y}_1)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_2)^2\right). \end{aligned}$$

Tässä mallissa $S^2 \sim Gam((n-2)/2, \; (n-2)/2\sigma^2)$.