

Ei-parametriset ja robustit menetelmät, kevät 2015

Harjoitus 4

1. Tarkastellaan midrange estimaattia

$$M_n = \frac{\min\{x_1, \dots, x_n\} + \max\{x_1, \dots, x_n\}}{2} = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}.$$

- a) Generoi $N(0, 1)$ -jakaumasta satunnaisotos otoskoolla $n = 200$ ja muodosta midrange-estimaatin empiirisen influenssifunktion kuvaaja. Mitä voit päätellä midrange-estimaatin robustisuudesta saadun kuvaajan perusteella?
 - b) Johda midrange-estimaatille empiirinen influenssifunktio $IF_n(x; F_n, M_n)$.
2. Vertaile yhden otoksen t-testin, merkkitestin ja Wilcoxonin pareittaisten otosten testin voimakkuuksia graafisesti p-arvon kertymäfunktioestimaatin avulla, kun havainnot tulevat a) normaalijakaumasta b) Laplace-jakaumasta c) t -jakaumasta vapausastein $\nu = 3$ ja d) tasaisesta jakaumasta.

Avuksi: Havainnot tulevat vastahypoteesijakaumasta, jonka symmetriapiste on Δ . Etsi sellainen Δ , jolla testien voimakkuudet ovat pienempiä kuin 1, kun $0 < \alpha < 0.10$. Liian suurella Δ :n arvolla testien eroja ei saa näkymään.

3. Osoita, että otosmediaanilla ja keskiarvolla on seuraavat ominaisuudet:

- a) $\hat{\Delta}(-x_1, \dots, -x_n) = -\hat{\Delta}(x_1, \dots, x_n)$
- b) $\hat{\Delta}(x_1 + c, \dots, x_n + c) = \hat{\Delta}(x_1, \dots, x_n) + c$

4. Osoita, että otoskeskihajonta

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

ja MAD-estimaatti

$$S_2 = 1.483 \cdot \text{Med}\{|x_i - M|\}$$

ovat skaalaestimaatteja, ts. niillä on seuraava ominaisuus:

$$S(cx_1 + d, \dots, cx_n + d) = |c|S(x_1, \dots, x_n).$$

Huom! MAD-estimaatin kaavassa M on aineiston x_1, \dots, x_n otosmediaani ja $\text{Med}\{|x_i - M|\}$ on residuaalien itseisarvojen otosmediaani. Vakio 1.483 takaa sen, että MAD on tarkentuva estimaattori keskihajonnalle, kun havainnot tulevat normaalijakaumasta.

5. Vertaa otoskeskihajontaa ja MAD-estimaattia simulontikokeiden avulla (ks. luentomonisteen kappale 2.1.6), kun havainnot tulevat normaalijakaumasta.

Huom! R-ohjelmistosta löytyy MAD-estimointifunktio `mad`, jolla on oletusarvoisesti `constant=1.4826`.

```
> ?mad
```