Galaksit ja kosmologia FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 6: Kosmologia II, 09/10/2023

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita I

- **Kalvo 3:** Friedmannin toinen yhtälö voidaan lausua maailmankaikkeuden energiakomponenttien avulla:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{\Lambda,0}\right] - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- **Kalvo 3**: Kertomalla tekijällä ($3/8\pi G$) saadaan oikealle puolelle pelkästään maailmankaikkeuden energiatiheydestä riippuvia termejä.

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita II

- **Kalvo 3:** Myös kaarevuustermi voidaan lausua tiheys-parametrin avulla:

$$\Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2} = 1 - \Omega_0$$

- **Kalvo 4:** Kriittinen tiheys riippuu vain Hubblen parametrin tämän hetkisestä arvosta. Massatiheydelle saadaan:

$$\rho_{m,0} = \Omega_{m,0}\rho_{\mathrm{crit},0} \approx 1.88 \times 10^{-29}\Omega_{m,0}h^2 \ \mathrm{gcm}^{-3}$$

$$h = \frac{H_0}{100 \ \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita III

- **Kalvo 6:** Punasiirtymän ja mittakaava-tekijän yhteys, normeeraus, mittakaavatekijä nykyhetkellä a_0=1.

$$a/a_0 = \frac{1}{1+z}, \quad a_0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{1+z}$$

- **Kalvo 7:** Friedmann-yhtälön ratkaisu säteilylle:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4$$

$$\dot{a}a = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}\right)^{1/2} \Rightarrow \int a da = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}\right)^{1/2} \int dt$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IV

- **Kalvo 7:** Friedmann-yhtälön ratkaisu säteilylle:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{r,0}\right)^{1/2} t$$

- **Kalvo 8:** Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle kun K=0 ja Ω_Λ=0:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{m,0}(\frac{a_0}{a})^3\right] \Rightarrow \dot{a}a^{1/2} = H_0 a_0^{3/2}$$

$$\int a^{1/2} da = \int H_0 a_0^{3/2} dt \Rightarrow \frac{2}{3}a^{3/2} = H_0 a_0^{3/2} t \Rightarrow \frac{a}{a_0} = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita V

- **Kalvo 9:** Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle kun K=+1, $\Omega_\Lambda=0$ (Suljettu malli): Voidaan löytää parametrinen ratkaisu

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)}(1-\cos\vartheta); \qquad H_0 t = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)^{3/2}}(\vartheta - \sin\vartheta)$$

- **Kalvo 9:** Maksimikoko kun $\vartheta = \pi$, silloin cos π =-1 ja sin π =0.

$$K \propto (1+z)^2 \qquad \Omega_m \propto (1+z)^3$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VI

- **Kalvo 10:** Friedmann-yhtälön ratkaisu aineelle kun K=-1, Ω_Λ=0 (Avoin malli): Voidaan myös löytää parametrinen ratkaisu

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})}(\cosh\vartheta - 1); \qquad H_0 t = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})^{3/2}}(\sinh\vartheta - \vartheta)$$

- **Kalvo 10:** Hyperbolinen sini ja kosini:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VII

- **Kalvo 11:** Friedmann-yhtälön ratkaisu laakealle $\Omega_m+\Omega_\Lambda=1$ mallille: Ratkaisu saadaan integroimalla sopivaa muuttujanvaihtoa käyttäen (Lask 3. tehtävä 5):

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2}\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t\right)\right]^{2/3}$$

- **Kalvo 11:** Varhaisilla hetkillä Ω_m dominoi verrattuna Ω_Λ-termiin, joten $a \propto t^{2/3}$. Myöhäisillä ajanhetkillä malli lähestyy de Sitter mallia, $\Omega_\Lambda=1$:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} \Rightarrow \int \frac{da}{a} = H_0\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} \int dt \Rightarrow \frac{a}{a_0} = e^{H_0(t-t_0)\Omega_{\Lambda,0}^{1/2}}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VIII

- **Kalvo 12:** Hiukkashorisontti:

$$\chi(r_e) = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad dt = \frac{da}{\dot{a}}$$

$$\Rightarrow \chi(r_e) = \int_{a_e}^{a_0} \frac{cda}{a\dot{a}} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{cada}{a^2\dot{a}} = \int_0^{a_0} \frac{dac}{a^2} \left[\frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}\right]^{-1/2}$$

- **Kalvo 12:** Horisontteja on olemassa mikäli

$$\rho a^2 \rightarrow \infty, \mathrm{kun\ a} \rightarrow 0$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IX

- **Kalvo 13:** Maailmankaikkeuden ikä, muuttujanvaihto.

$$\dot{a} = \frac{da}{dt}, \Rightarrow \dot{a} = aH_0E(z)$$

$$a = \frac{1}{1+z}, \Rightarrow da = -\frac{1}{(1+z)^2}dz$$

$$t(z) = \int_0^{a(z)} \frac{da}{\dot{a}} = \frac{1}{H_0}\int_z^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita X

- **Kalvo 13:** Maailmankaikkeuden ikä, Einstein-de Sitter malli:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)(1+z)^{3/2}}$$

$$t = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} (1+z)^{-3/2}$$

- **Kalvo 14-15:** Maailmankaikkeuden ikä muissa malleissa esitetty luentomonisteessa, sekä Lask. tehtävässä 3.5.

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XI

- **Kalvo 16:** Maailmankaikkeuden etäisyydet: Luennolta 5 muistutuksena luminositeetti- ja kulmaläpimitta-etäisyydet:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} = a_0 r(1+z), \quad d_A = \frac{D}{\vartheta} = \frac{a_0 r}{(1+z)}$$

- **Kalvo 16:** Mukana-laajeneva etäisyys ja muuttujanvaihto:

$$\chi(r) = \tau(t_0) - \tau(t) = c\int_{a(t)}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} \qquad da = -\frac{1}{(1+z)^2}dz$$

$$\chi(r) = \frac{c}{H_0 a_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XII

- **Kalvo 17:** Käyttäen hyväksi mukana-liikkuvan etäisyyden ja r-koordinaatin yhteyttä (Luento 5, kalvo 6), saadaan nyt ratkaistua kulma-läpimittaetäisyys mukana-liikkuvissa yksiköissä:

$$\chi(r) = \arcsin(r), K = +1 \quad ; \chi(r) = r, K = 0 \quad ; \chi(r) = \mathrm{arsinh}(r), K = -1$$

$$r = f_K\left[\frac{c}{H_0 a_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}\right]$$

$$f_K(\chi) = \sin\chi \ (K = +1); \ f_K(\chi) = \chi \ (K = 0); \ f_K(\chi) = \sinh\chi \ (K = -1)$$

- **Kalvo 17:** Huom. Mattigin kaava on voimassa vain malleille, jossa Ω_Λ=0, eli ei ΛCDM-mallille, joka on nykyisin kosmologian standardimalli.