Galaksit ja kosmologia
FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

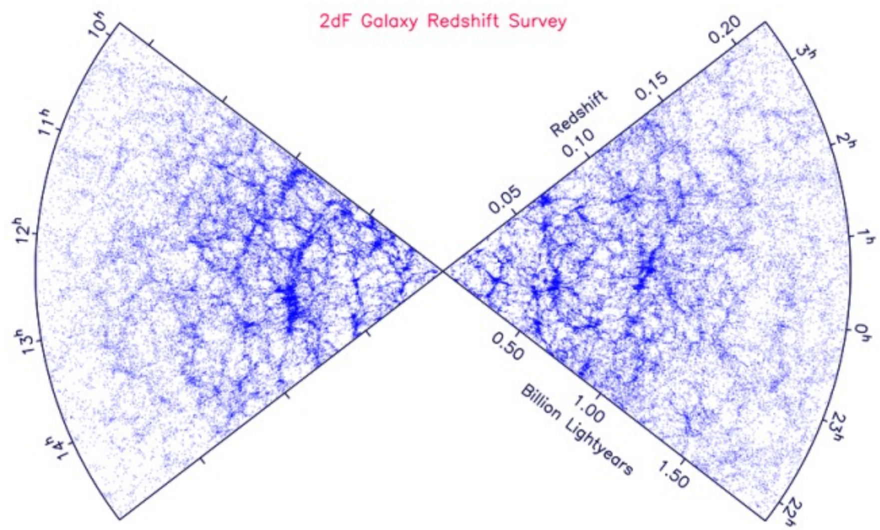
Luento 5: Kosmologia I, 02/10/2023

Tällä luennolla käsitellään

1. Kosmologinen periaate, maailmankaikkeuden geometria ja Robertson-Walker metriikka.
2. Hubblen vakion ja punasiirtymän määritelmät.
3. Etäisyyden määritelmä laajenevassa maailmankaikkeudessa.
4. Maailmankaikkeuden termodynamiikkaa
5. Friedmannin yhtälöiden johto Newtonin ja Einsteinin painovoimateorioissa.
6. Vastaa soveltuvin osin: CBMB: sivut 393-403

5.1 Kosmologinen periaate

- Kosmologinen periaate on hypoteesi, jonka mukaan maailmankaikkeus on hyvin suurilla etäisyyksillä (~80 Mpc) homogeeninen ja isotrooppinen.
- Tämä on yleistys Kopernikaanisesta periaatteesta jonka mukaan meidän paikkamme maailmankaikkeudessa ei ole mitenkään erityisasemassa.
- Nykyiset kosmologiset mallit perustuvat tähän kosmologiseen periaatteeseen ja yleiseen suhteellisuusteoriaan.



Havaittua lähiavaruuden suuren mittakaavan rakennetta, jokainen piste vastaa yhtä galaksia.

Fundamentaali-havaitsija

- Isotrooppisuus takaa sen että jokaisessa maailmankaikkeuden pisteessä on olemassa “fundamentaali-havaitsija”, jolle maailmankaikkeus on isotrooppinen.
- On olemassa yleinen kosminen aika, joka kuvaa sellaista 3-uloitteista hyperpintaa jolla esim. kosmisen mikroaaltotaustan säteilyn lämpötila ja maailmankaikkeuden keskitiheys kehittyvät monotonisesti maailmankaikkeuden laajenemisen funktiona.
- Isotrooppinen ja homogeeninen maailmankaikkeus on maksimaalisen symmetrinen ja sen metriikka voidaan määrätä:

$$dl^2 = a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]$$

$R(t)=a(t)R_0$
$a(t)$ on skaalatekijä

Maailmankaikkeuden geometria

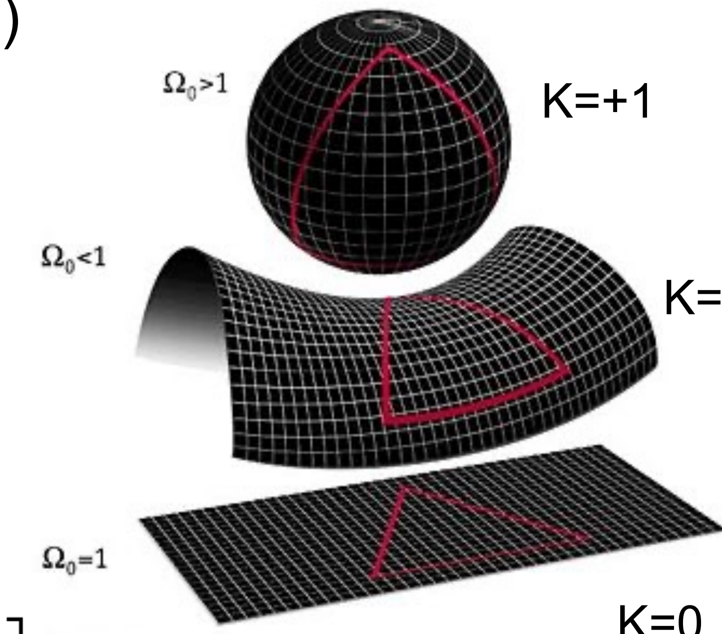
- Oletetaan laajeneva tai supistuva 3-pallo
  (Huom. 2D pinnan 3-ulotteinen vastine)

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2(t)R_0^2$$

$$\begin{cases} x = a(t) r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = a(t) r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = a(t) r \cos\vartheta \\ w = a(t)(R_0^2 - r^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$$

$$= a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - r^2/R_0^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$



K=+1

K=-1

K=0

Robertson-Walker metriikka I

- Koska isotrooppiset ja homogeeniset 3D-pinnat vastaavat vakio kosmista aikaa t saadaan neliavaruuden (1 aika+3 paikka) metriikaksi:

$$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]}$$

- Kahden fundamentaali-havaitsijan välinen todellinen etäisyys *l* voidaan laskea jollekin ajalle t integroimalla: *l*=∫d*l*:

$$l = a(t)\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t)\chi(r_1)$$

$$\chi(r) = \arcsin(r), K = +1 \quad ; \chi(r) = r, K = 0 \quad ; \chi(r) = \mathrm{arsinh}(r), K = -1$$

Robertson-Walker metriikka II

- Parametria χ(r) kutsutaan mukana-laajenevaksi etäisyydeksi (comoving distance), koska se on kahden havaitsijan todellinen etäisyys skaalatekijä-yksiköissä, eli a(t)-yksiköissä.
- Usein käytetään kosmisen ajan sijaan konformaali-aikaa joka on määritelty skaalatekijän funktiona seuraavasti:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

- Maailmankaikkeuden geometria on pallomainen (K=+1), laakea (K=0) tai satulapinnan muotoinen (K=-1). τ:ta käyttäen saadaan vaihtoehtoinen muoto metriikalle:

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - d\chi^2 - f_K^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)]$$

$$f_K(\chi) = \sin\chi,\ \ K = +1 \ \ ; f_K(\chi) = \chi,\ \ K = 0 \ \ ; f_K(\chi) = \sinh\chi,\ \ K = -1$$

5.2 Hubblen parametrin määritelmä

- Hubblen parametri H(t) on määritelty siten, että kosmisella ajanhetkellä *t* se on kahden fundamentaali-havaitsijan todellisen etäisyyden *l* muutos ajan funktiona: d*l*/d*t*=H(t)*l*

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t)\chi(r_1) = H(t)l \Rightarrow H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

- Hubblen parametri muuttuu ajan (punasiirtymän) funktiona, tämän hetkistä arvoa kutsutaan H_0 ja se parametrisoidaan usein näin:

$$h = \frac{H_0}{100\ \mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}}}$$

Punasiirtymän määritelmä

- Valonsäteet kulkevat nolla-geodeesia pitkin (ds=0) ja oletetaan säteittäin kulkeva valonsäde: $d\tau=d\chi$.

$$\begin{cases} \tau(t_0) - \tau(t_e) = \chi(r_e) - \chi(0) = \chi(r_e) \\ \tau(t_0 + \delta t_0) - \tau(t_e + \delta t_e) = \chi(r_e) \end{cases}$$

- Valonsäde lähtee aikana t_e ja saapuu perille t_0, $\chi(r)$ mukana-laajeneva etäisyys ei muutu :

$$\tau(t_0 + \delta t_0) - \tau(t_0) = \tau(t_e + \delta t_e) - \tau(t_e)$$

- Käytännössä $\delta t_c \ll t_c$ ja $\delta t_0 \ll t_0$. Käytetään konformaali-aikaa ja määritelmää $z=(\lambda_0-\lambda_e)/\lambda_e$. Punasiirtymä ei ole Doppler-ilmiö! Galaksit eivät liiku suurilla nopeuksilla, vaan avaruus laajenee!

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \qquad 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

Ominaisnopeudet

- Hiukkasen todellinen nopeus fundamentaali-havaitsijan suhteen on määritelty: v=d*l*/d*t*, v_{exp} on laajenemisnopeus ja v_{pec} ominaisnopeus.

$$v(t) = \dot{a}(t)\chi(t) + a(t)\dot{\chi}(t) = v_{\rm exp} + v_{\rm pec}$$

- Relativistinen Doppler-kaava ominaisnopeudelle on:

$$1 + z_{\rm pec} = \sqrt{\frac{1 + v_{\rm pec}/c}{1 - v_{\rm pec}/c}}$$

- Havaittu kokonais-punasiirtymän on kahden komponentin tulo:

$$1 + z_{\rm obs} = \frac{\lambda_2}{\lambda_P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_P}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad 1 + z_{\rm obs} = (1 + z_{\rm pec})(1 + z_{\rm cos})$$

- Epärelativistisessa tapauksessa: $z_{\rm obs} = z_{\rm cos} + \frac{v_{\rm pec}}{c}(1 + z_{\rm cos})$

Kulmaläpimitta-etäisyys

- Mukana-laajenevaa etäisyyttä χ(r) ja todellista etäisyyttä a(t)χ(r) ei voida havaita suoraan koska havaittu valo kaukaisesta kohteesta lähti matkaan paljon aikaisemmalla ajanhetkellä.
- Kulmaläpimitta-etäisyys määritellään seuraavasti: $\vartheta = \frac{D}{d_A}$
- Todellinen koko D voidaan ymmärtää kahden valosignaalin ϑ-kulman suuntaisena todellisena etäisyytenä, FRW-metriikasta saadaan: $$D = a_e r_e \int d\vartheta = \frac{a_0 r_e}{1+z}\vartheta$$
- Sijoittamalla saadaan: $$\boxed{d_A = \frac{a_0 r_e}{1+z_e} = a_e r_e}$$

Luminositeetti-etäisyys

- Luminositeetti-etäisyys määritellään: $F = \dfrac{L}{4\pi d_L^2}$
- Tarkastellaan pinta-alaa *A* joka peittää avaruuskulman ω havaitun kohteen etäisyydellä ja joka täten vastaa pinta-alaa ωd_A^2. Koska maailmankaikkeus laajenee, samaa avaruuskulmaa vastaavaa pinta-ala alkupisteessä on suurempi:

$$A = \omega d_A^2 (a_0/a_e)^2 = (a_0 r_e)^2 \omega$$

- Molempien pintojen läpi menee saman verran fotoneja:

$$\frac{L\delta t_e \omega}{4\pi h_P \nu_e} = \frac{F\delta t_0 A}{h_P \nu_0} \qquad F = \frac{\omega}{4\pi}\frac{L}{A}\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2 = \frac{L}{4\pi[a_0 r_e(1+z)]^2}$$

$$\boxed{d_L = a_0 r_e (1+z) = d_A (1+z)^2}$$

Pintakirkkauden käsite

- Staattisesessa avaruudessa tai hyvin pienillä etäisyyksillä pintakirkkaus etäisyyden funktiona on vakio.

$$S = \frac{F}{\vartheta^2} = const, \quad F \propto d^{-2} \quad \text{ja} \quad \vartheta^2 \propto d^{-2}$$

- Laajenevassa maailmankaikkeudessa kosmologisilla etäisyyksillä tämä ei enää päde:

$$S = \frac{F}{\frac{1}{4}\pi\vartheta^2} = \frac{L}{\pi^2 D^2}(1+z)^{-4}$$

- **Pintakirkkaus pienenee suurilla etäisyyksillä punasiirtymän neljäntenä potenssina kosmologista mallista riippumatta!**

5.3 Maailmankaikkeuden termodynamiikka I

- Termodynamiikan ensimmäinen laki dU=dQ+dW ja toinen laki dS=dQ/T, missä S on systeemin entropia. Homogeenisessä ja isotrooppisessa maailmankaikkeudessa ei ole lämpövuota tilavuuden V yli, missä V on pieni mielivaltainen osa maailmankaikkeutta.
- Adiabaattisesti laajenevalle tilavuudelle V saadaan:

$$dU + PdV = 0; \quad dS = 0; \quad \text{tilavuudelle } V \propto a(t)^3$$

- Maailmankaikkeuden energiakomponentit voidaan kirjoittaa:

$$\rho c^2 = \rho_m (c^2 + \epsilon) + \frac{4\sigma_{SB}}{c} T^4 + \rho_{\text{vac}} c^2$$

- 1. termi epä-relativistinen aine sisältäen lepomassan ja sisäisen energian, 2. termi mustan kappaleen säteily, 3. termi tyhjiö-energia (eli pimeä-energia).

Termodynamiikka II

- Termodynamiikan ensimmäinen laki energiatiheyden ρ funktiona:

$$V\,d\rho + (\rho + P/c^2)dV = 0$$

- Käytetään $V \propto a^3$ ja derivoidaan a:n suhteen:

$$\frac{d\rho}{da} + 3\left(\frac{\rho + P/c^2}{a}\right) = 0$$

- Tilanyhtälö-parametri (Equation-of-state parameter) *w* määritellään:

$$P = w\rho c^2$$

- Mikäli *w* ei riipu ajasta:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

Maailmankaikkeuden komponentit

Table 3.1. Thermodynamics of a homogeneous and isotropic universe.

Dominant component	w	ρ	P	T
matter	0	a^{-3}	a^{-5}	a^{-2}
radiation	$1/3$	a^{-4}	a^{-4}	a^{-1}
vacuum energy	-1	a^{0}	a^{0}	

1. Aineelle $\rho \propto a^{-3}$, $v \propto a^{-1}$, $P \propto a^{-5}$, $T \propto a^{-2}$ -> w=0 $$kT \propto m\langle v \rangle^2$$
2. Säteilylle $\rho \propto a^{-4}$, tilavuus a^{-3} + fotonin energian muutos a^{-1}. $T \propto a^{-1}$, koska $\rho \propto T^4$, musta kappale säilyy mustana kappaleena, $T \propto a^{-1}$ -> w=1/3.
3. Tyhjiöenergia ei riipu mittakaavatekijästä *a*, $P_{vac} = -\rho_{vac} c^2$, tästä seuraa w=-1.

5.4 Friedmann yhtälöt – Newton I

- Friedmannin yhtälö voidaan johtaa Newtonin teoriassa tarkastelemalla miten pallokuori laajenee:

$$m\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{GmM(< a)}{a^2}$$

$$M(< a) = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 \Rightarrow \ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t)$$

- Kerrotaan $\dot{a}(t)$ ja käytetään hyväksi: $\rho a\dot{a} = -\rho a^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\right)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\dot{a}(t)^2] = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t)\dot{a}(t) = +\frac{4\pi G}{3}\rho a^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)}\right)$$

Friedmann yhtälöt – Newton II

- Integroidaan yhtälö ajan funktiona.

$$\boxed{\dot{a}(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a(t)^2 - kc^2 \quad \mathrm{FRW2}}$$

- kc^2 on integroimisvakio, yhtälö pätee myös Suhteellisuusteoriassa. Newtonin teoria antaa tässä tapauksessa oikean tuloksen. Huom. oikea malli maailmankaikkeudelle saadaan Yleisestä Suhteellisuusteoriasta.
- Toinen FRW yhtälö saadaan huomioimalla että Suhteellisuusteoriassa paine *p* vaikuttaa tiheyden ρ lisäksi kappaleen energiaan ja täten myös massaan. Lisäksi tulee pimeän energian termit, kts. Sivu 20.

$$\boxed{\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}a(t)\left[\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right] \quad \mathrm{FRW1}}$$

Friedmann yhtälöt – Einstein I

- Kosmologian standardimalli seuraa Yleisestä Suhteellisuusteoriasta ja oletuksesta että maailmankaikkeus on homogeeninen ja isotrooppinen. Einsteinin kenttäyhtälö:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\upsilon}$ (Ricci tensori), R kaarevuusskalaari, $g_{\mu\upsilon}$ metriikka, Λ kosmologinen vakio, sekä $T_{\mu\nu}$ energia-liikemäärä-tensori.

$$R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}P$$

Friedmann yhtälöt – Einstein II

- Nyt nelinopeus $U^\mu=(c,0,0,0)$, eli ei ominaisliikettä. Tästä seuraa, että $T^\mu{}_\nu=\mathrm{diag}(\rho c^2,-P,-P,-P)$ ja $T=\rho c^2-3P$. Nyt lausumalla $g_{\mu\nu}$ FRW-metriikan avulla ja käyttämällä yksinkertaista muotoa $T_{\mu\nu}$:lle voimme ratkaista kaksi yhtälöä:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}}$$

FRW 1 aika-aika komponentista

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}}$$

FRW 2 paikka-paikka komponentista

Mitä opimme?

1. Kosmologisen periaatteen mukaan maailmankaikkeus on homogeeninen ja isotrooppinen.
2. Maailmankaikkeuden geometriaa voidaan kuvata Robertson-Walker metriikalla ja se on joko suljettu, laakea tai avoin.
3. Maailmankaikkeuden etäisyyksiä voidaan mitata kulma-läpimitta- ja luminositeetti-etäisyyksillä. Laajenevassa maailmankaikkeudessa kohteen pintakirkkaus pienenee verrannollisena $\sim(1+z)^4$.
4. Friedmannin yhtälöt ovat maailmankaikkeuden liikeyhtälöitä ja ne voidaan johtaa yksinkertaistetussa muodossa Newtonin yhtälöistä, varsinainen johto vaatii Yleistä suhteellisuusteoriaa.