



# **Galaksit ja kosmologia**

## **FYS2052, 5 op, syksy 2023**

E207 Physicum

### **Luento 4: Galaksien dynamiikka II, 25/09/2023**



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita I

- **Kalvo 3:** Tähtijoukkojen relaksaatioaika, jatkoa luennoilta 3:

$$t_{\text{relax}} = \frac{V^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{t_s}{2 \ln \Lambda}$$

- **Kalvo 4:** Relaksaatioaika ja kappaleiden lukumäärä  $N$ :

$$2E_k + E_p = 0 \Rightarrow 2 \left( \frac{1}{2} N m V^2 \right) \sim \frac{G(Nm)^2}{R}$$

$$\frac{t_{\text{relax}}}{t_{\text{cross}}} \sim \frac{V^4}{R 8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{V^4 R^2 4\pi}{8\pi G^2 m^2 N 3 \ln \Lambda} = \frac{V^4 R^2}{6 N G^2 m^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{6 \ln(N/2)}$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita II

- **Kalvo 5:** Kahden kappaleen relaksaatio I:

$$f_M(E) \propto e^{-E/k_B T} = e^{-[(m\Phi(\mathbf{x}) + \frac{mv^2}{2})/k_B T]}$$

$$\int_0^\infty v^2 f_m(E) = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow \left\langle \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(\mathbf{x}) \right\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

- **Kalvo 6:** Kahden kappaleen relaksaatio II:

$$\left\langle \frac{1}{2}mv_e^2(\mathbf{x}) \right\rangle = -\frac{1}{N} \sum m_\alpha \Phi(\mathbf{x}_\alpha) = -\frac{2}{N}E_p = \frac{4}{N}E_k$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \Phi(\mathbf{x}_\alpha) \quad , \quad 2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita III

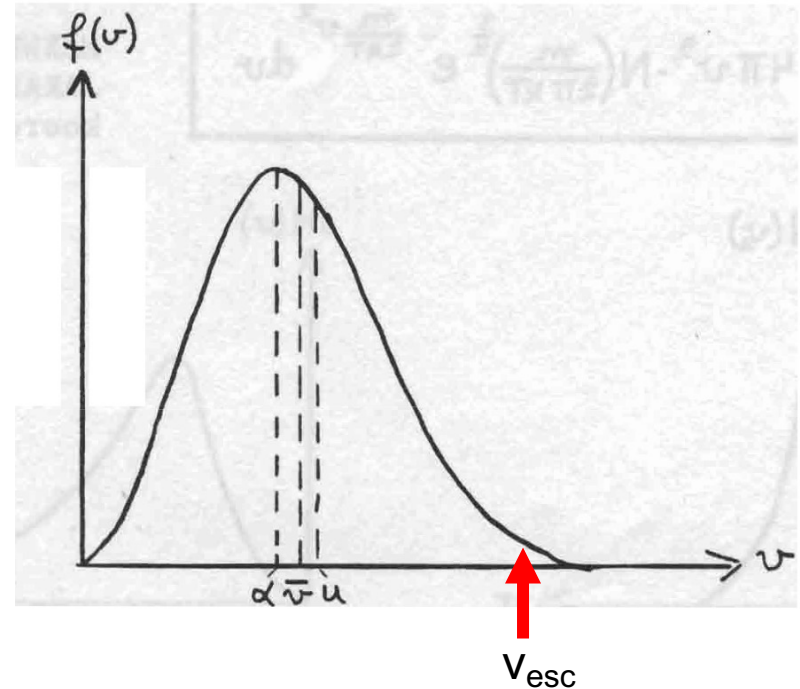
- **Kalvo 6:** Keskimäärin on voimassa:

$$\langle E_{k, \text{esc}} \rangle = 4 \langle E_k \rangle = 6k_B T$$

- **Kalvo 6:** Pakoon pääsevä osuus:

$$\frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 = 6k_B T \Rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{12k_B T}{m}}$$

$$\frac{\int_{\sqrt{12k_B T/m}}^{\infty} f_M(E) v^2 dv}{\int_0^{\infty} f_M(E) v^2} = 0.0074 \approx \frac{1}{136}$$





# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IV

---

- **Kalvo 7:** Lagrangen mekaniikan käyttö:

$$L = (E_k - E_p)/m \Rightarrow L = T - V$$

- **Kalvo 7:** Aksisymmetrisen järjestelmän Lagrangen funktio:

$$L = \frac{1}{2} \left[ \dot{R}^2 + (R\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 \right] - \Phi(R, z) \quad L_z = R^2\dot{\phi} = \text{vakio}$$

- **Kalvo 7:** Euler-Lagrangen yhtälö:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita V

- **Kalvo 7: R-koordinaatin liikeyhtälö**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{R}) - \left( R\dot{\phi}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0 \Rightarrow \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0$$

- **Kalvo 7:  $\phi$ -koordinaatin liikeyhtälö:**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi}) - 0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi}) = 0$$

- **Kalvo 7: z-koordinaatin liikeyhtälö:**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{z}) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VI

- **Kalvo 7:** Efektiivisen potentiaalin käyttö:

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z}$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VII

- **Kalvot 8-9:** Tähtien liike episykleinä (lisää tästä aiheesta Linnunradan rakenne kurssilla)

$$\kappa^2(R_g) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \Rightarrow \ddot{x} = -\kappa^2 x$$

$$\nu^2(R_g) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} \Rightarrow \ddot{z} = -\nu^2 z$$

- **Kalvot 8-9:** Ratkaisu x-koordinaatille

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x \Rightarrow x = X \cos(\kappa t + \psi)$$





# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VIII

- **Kalvo 9:**  $L_z$  säilyy vakiona, johdossa käytetty alla olevaa sarja-approksimaatiota:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{\Omega(R_g)R_g^2}{(R_g + x)^2} \approx \Omega(R_g) \left( 1 - \frac{2x}{R_g} + \dots \right)$$

- **Kalvo 9:** Kun  $x$  on pieni:  $\frac{1}{(1 + x)^2} \approx 1 - 2x$

- **Kalvo 9:**  $\phi$ -koordinaatti saadaan integroimalla

$$\phi(t) = \int \dot{\phi} dt = \phi_0 + \Omega(R_g)t - \frac{1}{R_g} \frac{2\Omega}{\kappa} X \sin(\kappa t + \psi)$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IX

- **Kalvo 10:** Oortin vakioita ja niiden merkitystä Auringon liikkeen mallintamisessa käsitellään tarkemmin Linnunradan rakenne kurssilla.
- **Kalvo 14:** Faasitiheys kuvaa tähtien todennäköisyystiheyttä ja tässä on suora analogia nesteen tiheyden ja virtauksen kanssa.
- **Kalvo 15:** Jatkuvuusyhtälö on voimassa mikäli tähtiä ei tuhoudu tai synny, eli tähtien lukumäärä säilyy muuttumattomana.

$$\Delta x [n(x, t + \Delta t) - n(x, t)] \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t}, \quad \text{kun } \Delta t \rightarrow 0 \text{ ja } \Delta x \rightarrow 0$$

$$n(x, t)v(x)\Delta t - n(x + \Delta x, t)v(x + \Delta x, t)\Delta t \rightarrow -\frac{\partial(nv)}{\partial x}, \quad \text{kun } \Delta t \rightarrow 0 \text{ ja } \Delta x \rightarrow 0$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita X

- **Kalvo 16:** Boltzmannin yhtälön johto. Nyt myös nopeuden muutokset ovat sallittuja, toisin kuin jatkuvuusyhtälön johdossa.

- **Kalvo 16:** Hiukkasten lukumäärän muutokset tasaisella nopeudella  $v$ :

$$\Delta x \Delta t [v f(x, v, t) - v f(x + \Delta x, v, t)] \approx -v \Delta x \Delta t \Delta v \frac{\partial f}{\partial x}$$

- **Kalvo 16:** Lisäksi hiukkasten määrä voi muuttua koska ulkoinen voima voi muuttaa nopeutta, eli  $dv/dt$  voi muuttua.

Yhteenlaskettu muutos:

$$\Delta x \Delta v [f(x, v, t + \Delta t) - f(x, v, t)] \approx -v \Delta x \Delta v \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta x \Delta t \left[ \frac{dv}{dt} f(x, v, t) - \frac{dv}{dt} f(x, v + \Delta v, t) \right]$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XI

- **Kalvo 16:** Otetaan rajat:

$$\Delta x \Delta v [f(x, v, t + \Delta t) - f(x, v, t)] \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}, \text{ kun } \Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \text{ ja } \Delta v \rightarrow 0$$

$$-v \Delta x \Delta v \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta x \Delta t \left[ \frac{dv}{dt} f(x, v, t) - \frac{dv}{dt} f(x, v + \Delta v, t) \right] \rightarrow$$
$$-v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{dv}{dt}(x, v, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}, \text{ kun } \Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \text{ ja } \Delta v \rightarrow 0$$

- **Kalvo 17:** Vaihtoehtoinen johto käyttäen Hamiltonin mekaniikkaa:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XII

---

- **Kalvo 19:** Boltzmannin yhtälön ratkaisuja – Jeansin yhtälöt ja niiden johto on ylikurssia (eli yksityiskohtia ei tarvitse hallita tällä kurssilla).
- **Kalvo 19:** Jeansin yhtälön 0-kertaluvun v-momentti:

$$\int dv \frac{\partial f}{\partial t} + \int dv v \frac{\partial f}{\partial x} - \int dv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [n \langle v \rangle] = 0$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIII

- **Kalvo 19:** Jeansin yhtälön 1-kertaluvun v-momentti

$$\int dv v \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \int dv v \cdot v \frac{\partial f}{\partial x} - \int dv v \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

- **Kalvo 19:** Muutaman välivaiheen ja osittaisintegroinnin jälkeen saadaan Jeansin yhtälön 1-momentti:

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} [n \sigma^2(x, t)]$$

- **Kalvo 19:** Vertaa kaasun Euler (liikeyhtälöön, kts. myös Luento 13)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p$$



# Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIV

- **Kalvo 20:** Boltzmannin yhtälön sovelluksia: Korkealla kiekon tason yläpuolella,  $\langle v_z \rangle n(z) \rightarrow 0$  saadaan:

$$\frac{d}{dz} [n(z)\sigma_z^2] = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} n(z)$$

- **Kalvo 20:** Yhdistämällä Poissonin yhtälön kanssa sylinterikoordinaateissa:

$$4\pi G\rho(R, z) = \nabla^2\Phi(R, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right]$$

$$4\pi G\rho(R, z) = \nabla^2\Phi(R, z) = \frac{d}{dz} \left\{ -\frac{1}{n(z)} \frac{d}{dz} [n(z)\sigma_z^2] \right\} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} [V^2(R)]$$