



Galaksit ja kosmologia

FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 4: Galaksien dynamiikka II 25/09/2023



Tällä luennolla käsitellään

1. Relaksaatioajat tähtijoukoissa ja miten relaksaatioaika riippuu järjestelmän hiukkasten kokonaislukumäärästä.
2. Kahden kappaleen relaksaatio ja tähtijoukon evaporaatio ja massasegregaatio.
3. Lyhyt katsaus tähtien ratoihin kiekkogalakseissa ja ellipsigalakseissa.
4. Johdetaan törmäyksetön Boltzmannin yhtälö ja sovelletaan sitä yksinkertaisiin tähtijärjestelmiin.
5. Vastaa soveltuvin osin: **S&G**: luvut 3.2.2-3.4.1



4.1 Relaksaatio-aika: Tähtijoukot

$$t_{\text{relax}} = \frac{V^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{t_s}{2 \ln \Lambda}$$

- Pallomaisilla tähtijoukoilla nopeusdispersio on tyypillisesti luokkaa $\sigma_r \sim 10$ km/s ja keskustan tiheydet ovat $\sim 10^4 - 10^5 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$. Lopuksi käytetään $\Lambda = r_c / 1$ AU, missä r_c on tähtijoukon ytimen säde ~ 5 pc ja täten saadan Auringon kaltaisille tähdille: $t_{\text{relax}} \sim 0.5 - 1$ Gyr, kun taas $t_{\text{cross}} \sim r_c / \sigma_r \sim 1$ Myr.
- Avoimilla tähtijoukkojen koko on samaa luokkaa pallomaisten joukkojen kanssa mutta niiden tähtitiheys on paljon pienempi ($n \leq 10 \text{ pc}^{-3}$) ja myös tähtien nopeudet ovat pienempiä, $\sigma_r \sim 1$ km/s. Avoimille joukoille $t_{\text{relax}} \leq 50$ Myr ja $t_{\text{cross}} \sim 5$ Myr. Lisäksi avoimissa joukoissa massa ei säily tähtituulien ja supernovien takia.
- Avoimet joukot hajoavat varsin nopeasti, mutta dynaamiset vaikutukset näkyvät myös pallomaisissa tähtijoukoissa miljardien vuosien aikaskaalalla.



Relaksaatio-aika ja kappaleiden lukumäärä

- Lasketaan seuraavaksi relaksaatio-aika systeemille joka koostuu N kappaleesta käyttäen hyväksi viriaaliteoreemaa:

$$\frac{1}{2}NmV^2 \sim \frac{G(Nm)^2}{2R} \quad \Lambda = \frac{R}{r_s} \sim \frac{GmN}{V^2} \cdot \frac{V^2}{2Gm} \sim \frac{N}{2}$$

- Dynaaminen aikaskaala jossa tähti kulkee systeemin poikki on $t_{\text{cross}} \approx R/V$ ja $N=4n\pi R^3/3$:

$$\frac{t_{\text{relax}}}{t_{\text{cross}}} \sim \frac{V^4 R^2}{6NG^2 m^2 \ln \Lambda} \sim \frac{N}{6 \ln(N/2)}$$

- Galakseissa jossa on $N \approx 10^{11}$ tähteä relaksaatiolla on merkitystä vain 10^8 dynaamisen aikaskaalan (t_{cross}) jälkeen, pallomaisissa tähtijoukoissa $N \approx 10^6$, joten relaksaatio tulee tärkeämmäksi paljon lyhyemmässä ajassa.



Kahden kappaleen relaksaatio I

- Kun tähti liikkuu galaksin sileässä potentiaalissa sen liike ei riipu sen massasta, vaan yleensä vain sen paikasta. Mutta kahden kappaleen välisissä vahvoissa vuorovaikutuksissa tähdet voivat vaihtaa energiaa ja liikemäärää. Tätä prosessia kutsutaan **kahden kappaleen relaksaatioksi**.
- Kahden kappaleen vuorovaikutukset muuttavat tähtien energiajakauman todennäköisimpään muotoon: Maxwell-Boltzmannin jakaumaan:

$$f_M(E) \propto e^{-E/k_B T} = e^{-[(m\Phi(\mathbf{x}) + \frac{mv^2}{2})/k_B T]}$$

- Integroimalla $f_M(E)v^2$ nopeuden yli saadaan kuten statistisessa fysiikassa atomeille alla oleva yhteys. **Dynaaminen “lämpötila” T** riippuu systeemin energiasta, kuumassa systeemissä korkea T, kylmässä matala T:

$$\frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$



Kahden kappaleen relaksaatio II

- Keskimäärin raskaammat tähdet liikkuvat hitaammin kuin kevyemmät. Tämä johtaa tähtijoukkojen “höyrystymiseen”, eli kevyimmät tähdet karkaavat.

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_e^2(\mathbf{x}) \right\rangle = -\frac{1}{N} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \Phi(\mathbf{x}_{\alpha}) = -\frac{2}{N} E_p = \frac{4}{N} E_k$$

- Keskimäärin pakoon vaadittava kineettinen energia on vain 4 kertaa tähden keskimääräinen kineettinen energia, eli $6k_B T$.

$$\frac{\int_{\sqrt{12k_B T/m}}^{\infty} f_M(E) v^2 dv}{\int_0^{\infty} f_M(E) v^2} = 0.0074 \approx \frac{1}{136} \quad t_{\text{evap}} \sim 136 t_{\text{relax}}$$

- Lisäksi raskaimmat tähdet vajoavat keskustaan \rightarrow massasegregaatio, koska $E_{\text{kin},1} \approx E_{\text{kin},2}$. Tähtijoukon ydin romahtaa ja ulko-osissa olevat tähdet karkaavat, laskujen mukaan:

$$t_{\text{corecollapse}} \sim 12 - 20 t_{\text{relax}}$$



4.2 Tähtien radat galaksissa: Kiekkogalaksit

- Kiekkogalakseissa tähdet liikkuvat melkein ympyräradoilla galaksin yhteis-potentiaalissa. Aksisymmetrisessä potentiaalissa L_z säilyy:

$$\frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi}) = 0, \quad L_z = R^2 \dot{\phi} = \text{vakio}$$

$$\ddot{R} = R \dot{\phi}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R} = - \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R}$$

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

- Efektiiivisessä potentiaalissa on L_z johtuva lisätermi joka rajaa tähden liikettä. z-komponentti samalla lailla:

$$\ddot{z} = - \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z}$$

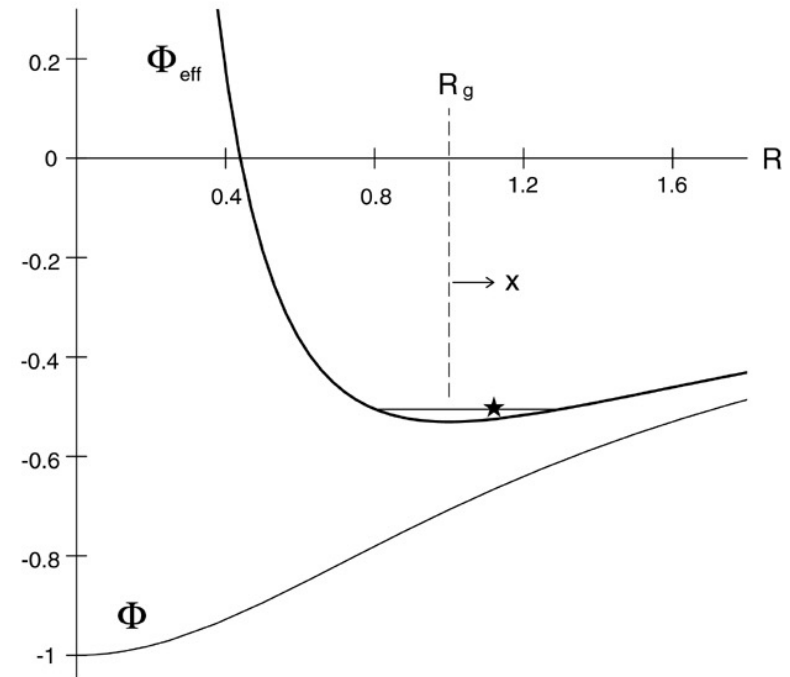


Fig 3.8 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007



Tähtien liike episykleinä I

- Tähdille jotka kiertävät lähes ympyrärataa voimme kehittää efektiivisen potentiaalin Taylor sarjana:

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + O(xz^2).$$

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} ; \quad \nu^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)},$$

- Harmonisen värähtelijän liikettä -> episyklejä.

$$\ddot{x} = -\kappa^2 x,$$

$$\ddot{z} = -\nu^2 z.$$

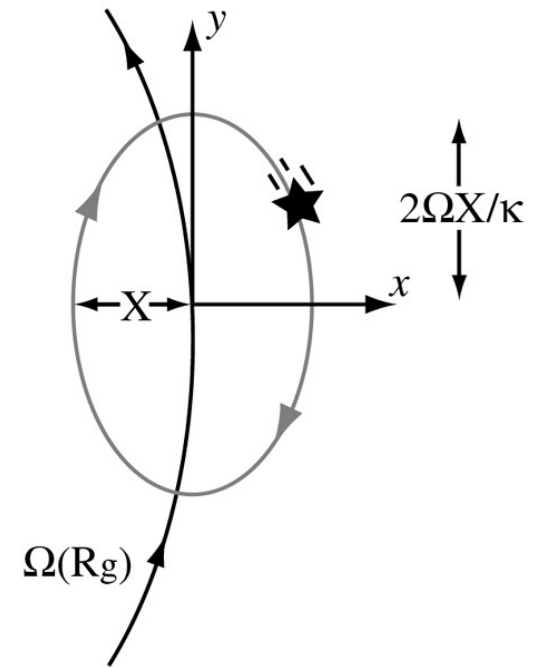


Fig 3.9 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007

R_g on ohjauskeskus, episykliliike on retrogradista.



Tähtien liike episykleinä II

- Ohjauskeskus R_g liikkuu pitkin ympyrärataa ja tähti kiertää pitkin episykliä, kun tähti on lähempänä galaksin keskustaa ratanopeus on suurempi ja episyklin ulko-osissa nopeus on vastaavasti pienempi.
- Etäisyys keskustasta on $R=R_g+x$ ja kiertäessään episykliä ϕ nopeuden täytyy muuttua niin, että L_z säilyy vakiona ja jälleen Taylor-sarjaa käyttäen saadaan:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{\Omega(R_g)R_g^2}{(R_g + x)^2} \approx \Omega(R_g) \left(1 - \frac{2x}{R_g} + \dots \right)$$

- Tämä lauseke voidaan integroida ja saadaan $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \phi_0 + \Omega(R_g)t - \frac{1}{R_g} \frac{2\Omega}{\kappa} X \sin(\kappa t + \psi)$$



Oortin vakiot

- κ on episyklinen taajuus ja ν on vertikaalinen liiketaajuus:

$$\kappa^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} \quad \kappa^2(R_g) = \left(R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right)_{R_g}$$

$$\nu^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}$$

- Oortin vakiot voidaan mitata havaitsemalla tähtiä Auringon lähellä ja niistä saadaan laskettua arvot suureille κ/Ω , sekä ν/Ω .

$$A(R) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right) = -\frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR}, \quad \Omega = A - B \quad ; \quad \kappa^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega.$$

$$B(R) \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right) = - \left(\Omega + \frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} \right),$$



Tähtien radat eivät sulkeudu

- Auringon lähellä $\kappa \approx 1.4\Omega$, eli aurinko tekee noin 1.4 radiaalista oskillaatiota yhden ratakierron aikana. Lisäksi aurinko tekee yhden oskillaation pystysuorassa suunnassa (z-suunta) noin 80 miljoonassa vuodessa ($\nu \approx 2\kappa$) kun yhteen ratakierrukseen menee noin 220 miljoonaa vuotta.
- Oortin vakioita ja auringon liikettä käsitellään tarkemmin Linnunradan rakenne kurssilla.

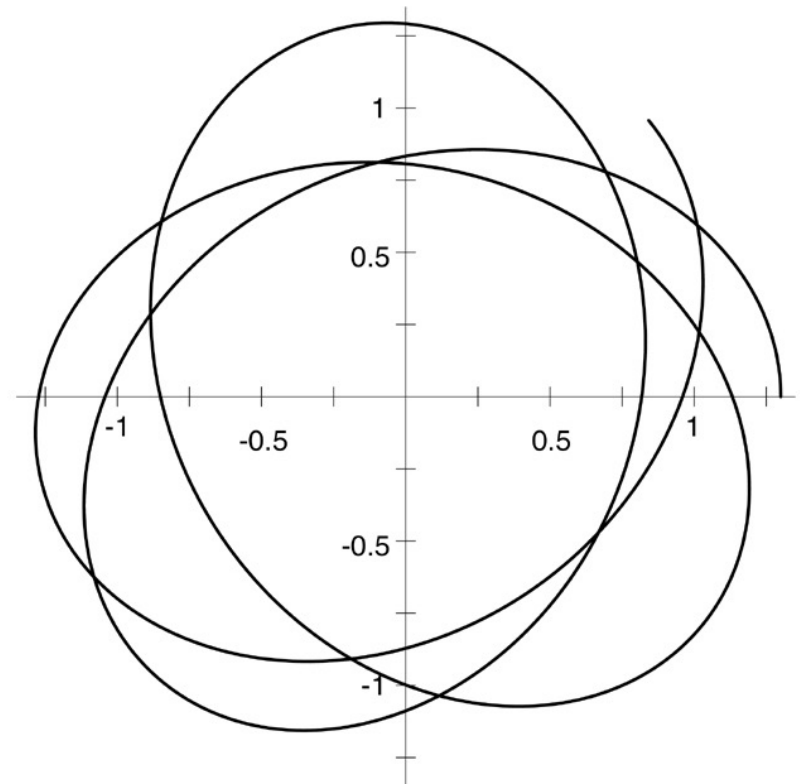


Fig 3.10 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007



Tähtien radat ellipsigalakseissa I

- Ellipsigalaksit ovat yleisesti triaksaalisia ja niiden potentiaalit ovat täten tyypillisesti ei-aksisymmetrisiä.
- Yleisesti tähtien radat voidaan jakaa 'loop'-ratoihin, jolla on tietty pyörimissuunta, vaikkakin R vaihtelee voimakkaasti sekä 'box'-ratoihin, ja 'tube'-ratoihin' jotka kulkevat galaksin keskustan läpi.

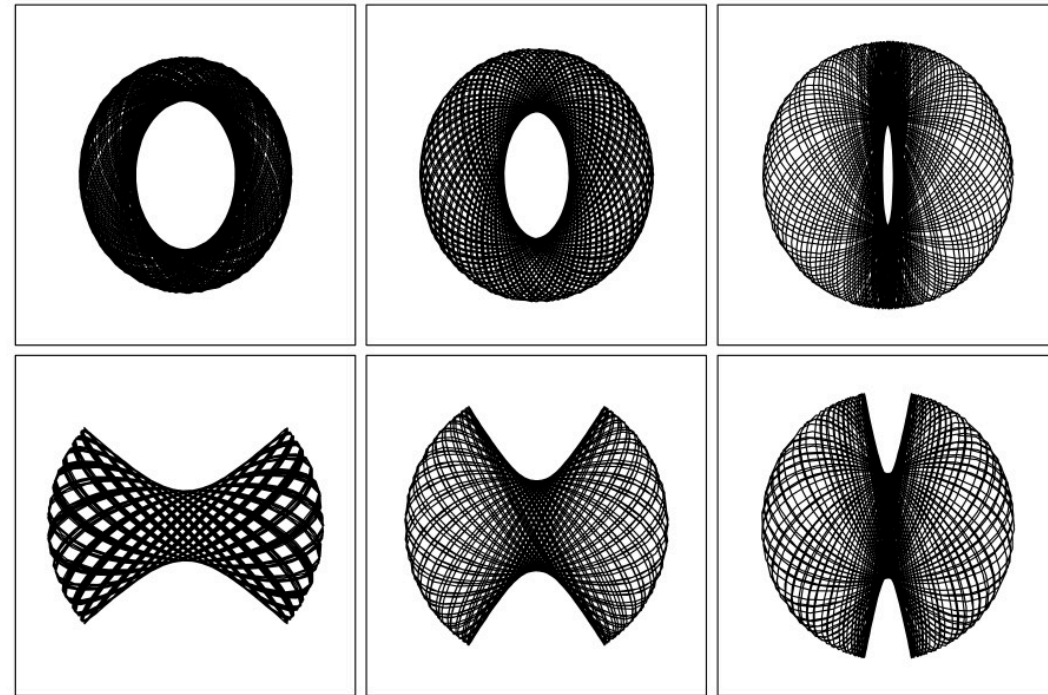
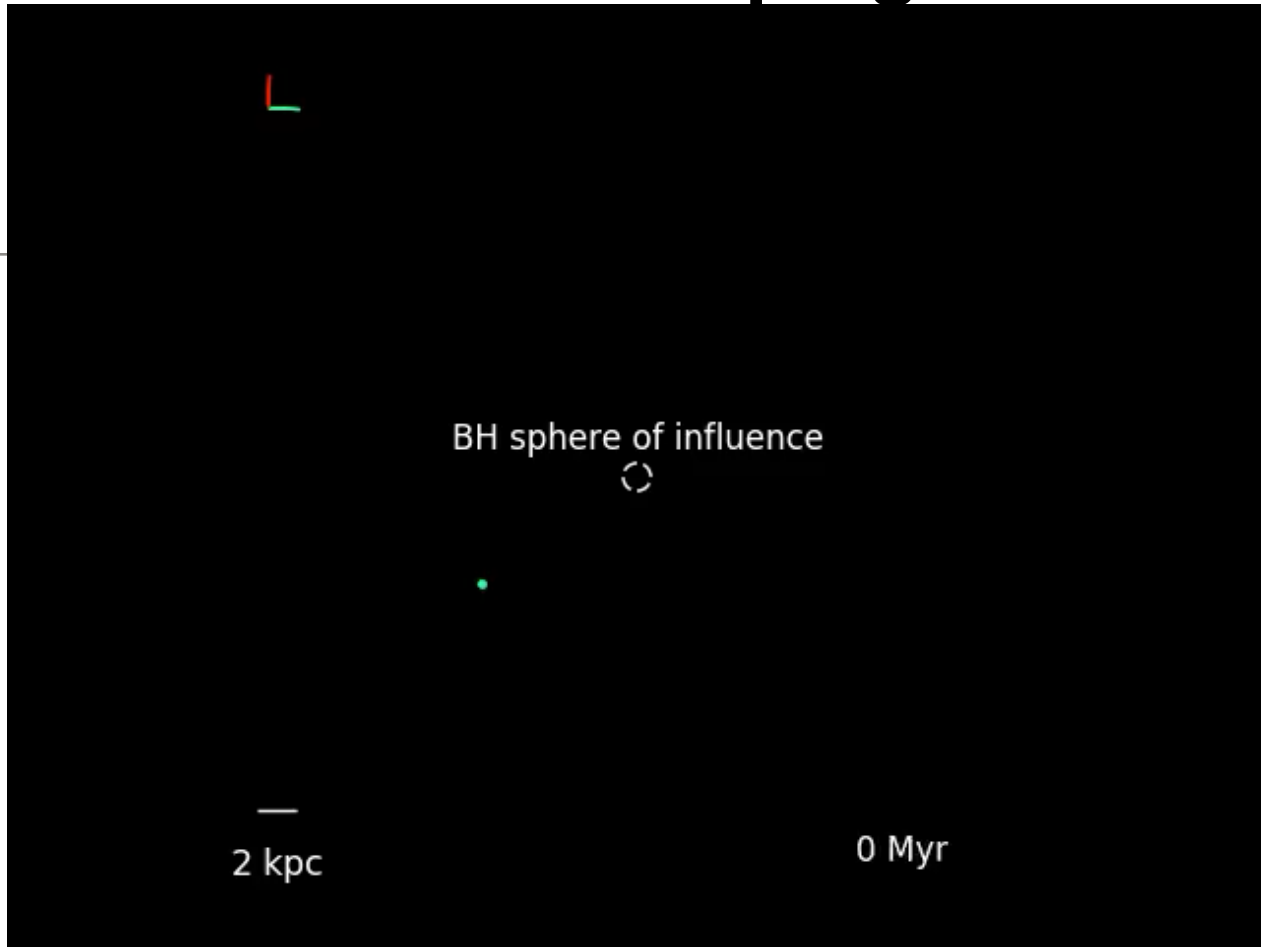


Figure 3.10 A selection of loop (top row) and box (bottom row) orbits in the potential $\Phi_L(q = 0.9, R_c = 0.14)$ at the energy of Figures 3.8 and 3.9.

Binney&Tremaine: "Galactic Dynamics", 2008

Tähtien radat ellipsigalakseissa II



- Esimerkkejä erilaisista radoista simuloidusta ellipsigalaksissa, jonka keskellä on supermassiivinen kaksoismusta-aukko. Lisätietoja julkaisusta [Frigo et al., 2021, MNRAS, 508, 4610, ArXiv:2109.09996](#).



4.3 Törmäyksetön Boltzmannin yhtälö

- Voimme mallintaa tähtiä galaksissa kuten atomeja kaasussa. Faasitiheys $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ kertoo tähtien todennäköisyystiheyden kuusiulotteisessa paikka-nopeus-faasiavaruudessa (\mathbf{x}, \mathbf{v}) :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

- Numerotiheys $n(\mathbf{x}, t)$ paikassa \mathbf{x} saadaan integroimalla nopeuksien yli:

$$n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dv_x dv_y dv_z$$

- Keskiarvot, kuten keskinopeus $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle$ saadaan myös integroimalla:

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dv_x dv_y dv_z$$



Jatkuvuusyhtälö

- Tarkastellaan tähtien liikettä x -suunnassa. Tähtien muutos laatikossa voidaan kuvata:

$$\Delta x [n(x, t + \Delta t) - n(x, t)] \approx n(x, t)v(x)\Delta t - n(x + \Delta x, t)v(x + \Delta x, t)\Delta t \star$$

- Ottamalla rajat $\Delta t \rightarrow 0$ ja $\Delta x \rightarrow 0$ saadaan jatkuvuusyhtälö:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nv)}{\partial x} = 0$$

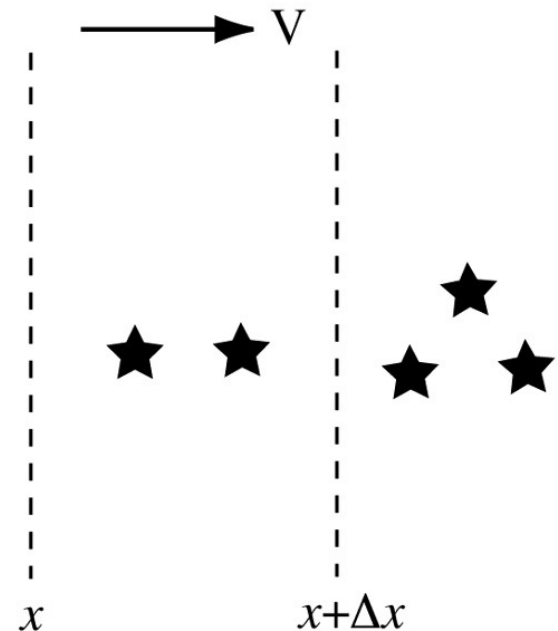


Fig 3.12 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP2007



Boltzmannin yhtälön johto I

- Yhtälön johdossa oletetaan että 2-kappaleen törmäykset eivät ole tärkeitä ja nyt myös nopeuden muutokset ovat sallittuja.

$$\Delta x \Delta t [v f(x, v, t) - v f(x + \Delta x, v, t)] \approx -v \Delta x \Delta t \Delta v \frac{\partial f}{\partial x}$$

- Mutta laatikossa olevien tähtien määrä voi myös muuttua koska nopeudet muuttuvat ulkoisen voiman johdosta.

$$\Delta x \Delta v [f(x, v, t + \Delta t) - f(x, v, t)] \approx -v \Delta x \Delta v \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta x \Delta t \left[\frac{dv}{dt} f(x, v, t) - \frac{dv}{dt} f(x, v + \Delta v, t) \right]$$

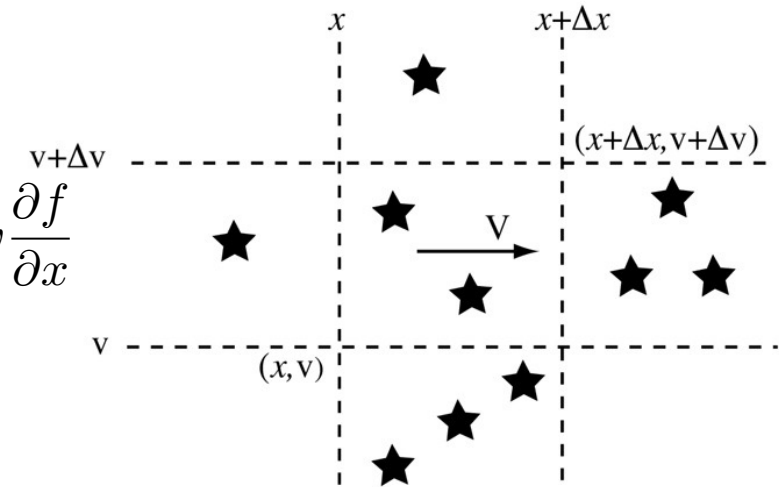


Fig 3.13 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007



Boltzmannin yhtälön johto II

- Vaihtoehtoinen johto faasitiheyden jatkuvuusyhtälöä ja Hamiltonin mekaniikkaa käyttäen, missä $H=K+V$ ($K=E_k$ ja $V=E_p$).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot (f \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (f \dot{\mathbf{p}}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left(f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(f \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \text{in 1D : } \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$



Boltzmannin yhtälön johto III

- Newtonin painovoimakentässä tähden kiihtyvyys ei riipu siitä kuinka nopeasti se liikkuu, vaan vain sen paikasta.

$$dv/dt = -\partial\Phi(x, t)/\partial x$$

- Boltzmannin yhtälö yhdessä ulottuvuudessa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

- Boltzmannin yhtälö kolmessa ulottuvuudessa:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$



Boltzmannin yhtälön ratkaisuja

- Boltzmannin yhtälöä ei yleensä ratkota suoraan, vaan integroidaan nopeuden yli ja täten saadaan momenttiyhtälöitä (Jeansin yhtälöitä).
- Integroimalla Boltzmannin yhtälö nopeuden yli:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [n(x, t) \langle v(x, t) \rangle] - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) [f]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \rightarrow \text{Jatkuvuusyhtälö}$$

- Kertomalla nopeudella v ja integroimalla vielä kerran:

$$\frac{\partial}{\partial t} [n(x, t) \langle v(x, t) \rangle] + \frac{\partial}{\partial x} [n(x, t) \langle v^2(x, t) \rangle] = -n(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} [n \sigma^2(x, t)]$$

“Euler-yhtälö”, mutta kaasun paineen sijaan on kineettinen paine, eli nopeusdispersio, σ^2 .



Boltzmannin yhtälön sovelluksia I

- Käyttämällä Boltzmannin yhtälöä ja havainnoimalla tähtien z-suuntaista liikettä voidaan arvioida galaksin kiekon massaa Auringon lähellä. Olettamalla että potentiaali ei muutu ajan funktiona ja että f ja n eivät muutu ajan funktiona. Korkealla kiekon tason yläpuolella, $\langle v_z \rangle n(z) \rightarrow 0$ saadaan:

$$\frac{d}{dz} [n(z)\sigma_z^2] = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} n(z)$$

- Yhdistämällä tämä tulos Poissonin yhtälöön:

$$4\pi G\rho(R, z) = \nabla^2\Phi(R, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right]$$

$$4\pi G\rho(R, z) = \nabla^2\Phi(R, z) = \frac{d}{dz} \left\{ -\frac{1}{n(z)} \frac{d}{dz} [n(z)\sigma_z^2] \right\} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} [V^2(R)]$$



Boltzmannin yhtälön sovelluksia II

- Viimeinen termi on hyvin pieni Linnunradassa, koska $V(R)$ on lähes vakio. $n(z)$ voidaan mitata havainnoista, mutta ρ -tiheyden (3D) saamiseksi $n(z)$ täytyy derivoida kahdesti joka lisää virhettä.
- On helpompaa laskea pintatiheys $\Sigma(<z)$ (2D) olettamalla että kiekko on symmetrinen $z=0$ tason ympärillä.

$$2\pi G \Sigma(<z) = 2\pi G \int_{-z}^z \rho(z') dz' \approx -\frac{1}{n(z)} \frac{d}{dz} [n(z) \sigma_z^2]$$

- Tämän laskun teki ensimmäisenä Jan Oort vuonna 1932 ja tulos oli $\Sigma(<700 \text{ pc}) \approx 90 M_{\odot} \text{pc}^{-2}$. Nykyinen tulos on noin $\Sigma(<1100 \text{ pc}) \approx 71 \pm 6 M_{\odot} \text{pc}^{-2}$. Galaksin kiekossa ei ole juurikaan pimeää ainetta. Pimeä aine dominoi galaksin massaa kiekon tason ulkopuolella ja galaksin ulko-osissa.



Mitä opimme?

1. Relaksaatioaika riippuu systeemin kappaleiden lukumäärästä, suurilla systeemeillä pitkä t_{relax} (galaksit), tähtijoukoilla lyhyt t_{relax} .
2. Tähtien energia muuttuu kahden kappaleen vahvoissa vuorovaikutuksissa, energiaerot tasoittuvat, massiiviset tähdet vajoavat keskustaan, kevyet tähdet nousevat tähtijoukon ulko-osiin.
3. Tähdet kiekkogalakseissa liikkuvat lähes ympyräradoilla ja niiden R - ja ϕ -suuntaista liikettä voidaan kuvata episykleillä, z -suuntainen liike on harmonisen värähtelijän liikettä. Ellipsigalakseissa ei ole yleisesti järjestynyttä liikettä ja osa tähdistä kulkevat galaksin keskustan kautta (box ja tube-radat).
4. Boltzmannin yhtälö kuvaa tähtien liikettä 6-ulotteisessa faasi-avaruudessa ja sillä on monta tärkeätä sovellusta.
5. Yhtälöstä voidaan johtaa Euler-yhtälöä muistuttava liikeyhtälö, jossa kaasun paineen P sijasta on tähtien dynaaminen 'nopeuspaine' σ^2 .