



Galaksit ja kosmologia

FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 3: Galaksien dynamiikka I, 18/09/2023



Tällä luennolla käsitellään

1. Liikettä galaksin painovoimakentässä ja Newtonin painovoimalaki.
2. Poissonin yhtälö ja Newtonin teoreemat.
3. Viriaaliteoreeman johto ja sen sovelluksia.
4. Kahden kappaleen väliset vahvat vuorovaikutukset.
5. Kahden kappaleen väliset heikot vuorovaikutukset.
6. Vastaa soveltuvin osin: **S&G**: luvut 3.1-3.2.2



3.1 Liike painovoimakentässä

- Tähdet liikkuvat galakseissa tyypillisesti noin $v \sim 100$ km/s nopeuksilla ja koska tähdet ovat hyvin tiheitä pistemassoja tähtienvälisen kaasun paine tai magneettikentät eivät vaikuta niiden liikkeeseen.
- Voimme kuvata tähtien liikkeitä käyttäen ainoastaan Newtonin painovoimateoriaa, pienet nopeudet ja heikot painovoimakentät takaavat sen ettemme tarvitse Yleistä suhteellisuusteoriaa muuta kuin poikkeustapauksissa (esim. tähtien radat lähellä mustia aukkoja).
- Tutkimalla tähtien ratoja galaksissa voimme myös arvioida painovoiman kautta epäsuorasti galaksin massajakaumaa.
- Painovoimassa on vain plus-merkkisiä 'varauksia', ei varauksen varjostumista kuten elektrodynamiikassa. Kaikki hiukkaset vaikuttavat kaikkiin hiukkasiin, kaukovoimat ovat täten tärkeitä.



Newtonin painovoimalaki

- Newtonin painovoimalaissa massat vetävät aina toisiaan puoleensa, toisin kuin sähkömagneettisessa vuorovaikutuksessa jossa on sekä positiivisia että negatiivisia varauksia. Painovoimassa varauksen varjostus ei siis ole mahdollista.

- Newtonin laki tähtijoukossa jossa on N tähteä:

$$\frac{d}{dt}(m_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}) = - \sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_{\alpha}m_{\beta}}{|\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}|^3} (\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta})$$

- Voima massayksikköä kohden voidaan myös lausua potentiaalin gradienttia, eli $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$.

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -m\nabla\Phi \quad \Phi(\mathbf{x}) = - \sum_{\alpha} \frac{Gm_{\alpha}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\alpha}$$



Poissonin yhtälön johto

- Lasketaan painovoiman vuo pallomaisen suljetun pinnan läpi:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{\partial V} -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \\ &= -\frac{GM}{r^2} \oint_{\partial V} dA \\ &= -G4\pi M\end{aligned}$$

- Käytetään sitten divergenssiteoreemaa: $\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$
- Käyttämällä lopuksi hyväksi määritelmiä $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ ja $M = \int \rho dV$ päädytään tulokseen:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi \rho G$$



Newtonin kaksi teoreemaa

1. Painovoima pallomaisen kuoren sisällä, jonka tiheys on vakio on kaikkialla nolla.
2. Pallosymmetrisen kappaleen ulkopuolella painovoimakenttä on sama kuin vastaavan massaisen pistemäisen kappaleen painovoimakenttä.

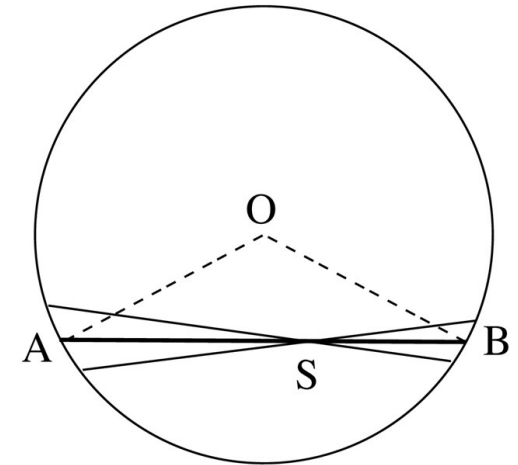


Fig 3.1 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007

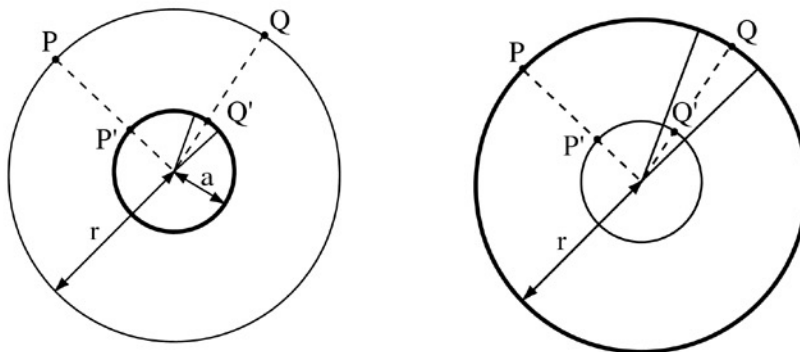


Fig 3.2 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007



Pallomaisen tiheysjakauman voima

- Pallosymmetriselle kappaleelle jonka tiheysjakauma on $\rho(r)$, painovoima on summa kaikesta säteen r sisäpuolella olevan massan painovoimasta. Tähdessä kiihtyvyys ympyräradalla $a=v^2/r$ tulee siis sen radan sisällä olevan massan painovoimasta:

$$\frac{v^2(r)}{r} = -F_r(r) = \frac{GM(< r)}{r^2}$$

- Painovoima-potentiaali pisteessä r on summa säteen sisällä olevasta ja säteen ulkopuolella olevasta potentiaalista:

$$\Phi(r) = - \left[\frac{GM(< r)}{r} + 4\pi G \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right]$$



Energia ja pakonopeus

- Galaksissa jossa massajakauma on staattinen painovoimapotentiaali ei ole aika-riippuvainen. Otetaan pistetulo $\mathbf{v};n$ kanssa.

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -m\nabla\Phi(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + m\mathbf{v} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) = 0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\Phi(\mathbf{x}) \right]$$

- Tähti voi paeta vain jos $E > 0$ -> raja pakonopeudelle.

$$E = \left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\Phi(\mathbf{x}) \right] \Rightarrow v_e^2 = -2\Phi(\mathbf{x})$$



Liikemäärämomenti

- Tähdien liikemäärämomenti $L = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$:

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{x} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -m\mathbf{x} \times \nabla\Phi$$

- Pallosymmetrisessä galaksissa voima osoittaa galaksin keskusta ja liikemäärämomenti ei muutu ajan funktiona, eli $dL/dt=0$.
- Tähtijoukossa jokaisen yksittäisen tähden kokonaisenergia ei säily, sen sijaan kaikkien tähtien yhteenlaskettu energia tähtijoukossa on vakio.



3.2 Viriaalteoreeman johto I

- Tähdet ovat tähtijoukossa kiihtyvässä liikkeessä:

$$\frac{d}{dt}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = - \sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3} (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)$$

- Viriaalteoreema kertoo miten **keskimäärin** kineettinen ja potentiaali-energia ovat tasapainossa. Lisätään ulkoinen voima \mathbf{F}_{ext} ja otetaan pistetulot \mathbf{x}_α ja \mathbf{x}_β kanssa.

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\alpha = - \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3} (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \cdot \mathbf{x}_\alpha + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}}^\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha$$

$$\sum_{\beta} \frac{d}{dt}(m_\beta \mathbf{v}_\beta) \cdot \mathbf{x}_\beta = - \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|^3} (\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\beta + \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\text{ext}}^\beta \cdot \mathbf{x}_\beta$$



Viriaaliteoreeman johto I

- Näiden kahden yhtälön vasen puoli on sama:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{d^2}{dt^2} (m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2E_k$$

- Tässä on määritelty hitausmomentti:

$$I = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}$$

- Käyttämällä hyväksi potentiaalienergian määritelmää:

$$E_p = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} \frac{G m_{\alpha} m_{\beta}}{|\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}|} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \Phi(\mathbf{x}_{\alpha})$$

- Ottamalla keskiarvo kaikkien tähtien yli (katso lisämateriaali) huomataan että edellisen sivun yhtälön oikean puolen ensimmäinen tekijä on potentiaalienergia.

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2E_k = E_p + \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}$$



Viriaalteoreeman johto III

- Ottamalla keskiarvo tästä yhtälöstä aikavälillä $0 < t < \tau$ päädytään:

$$\frac{1}{2\tau} \left[\frac{dI}{dt}(\tau) - \frac{dI}{dt}(0) \right] = 2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle + \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha} \right\rangle$$

- Niin kauan kun tähdet ovat sidottuja joukkoon tulo $|\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha}|$ ja siis $|dI/dt|$ eivät kasva äärettömän suureksi, ja kun $\tau \rightarrow \infty$, yhtälön vasen puoli $\rightarrow 0$.

$$2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle + \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha} \right\rangle = 0$$

- Tämä on viriaalteoreema. Galaksidynamiikan tärkeimpiä tuloksia.**



Viriaalteoreeman sovelluksia I

- Mikäli galaksi tai tähtijoukko on tasapainossa voimme laskea arvon kohteen massalle käyttämällä viriaalteoreemaa.
- Tähtijoukon säteen suuntainen nopeusdispersio voidaan mitata σ_r ja olettamalla nopeuden isotropia (eli nopeusdispersio sama kaikissa suunnissa.)
- $\rightarrow E_{\text{kin}} = (3\sigma_r^2/2)(M/L)L_{\text{tot}}$ ja lähes pallomaisille kohteille potentiaali $\Phi \approx -GM^2/2r_c$. Nyt käyttämällä viriaalteoreemaa:
- Usein on helpompaa mitata kokonaisluminositeetti: $L_{\text{tot}} \approx 4\pi r_c^2 I(0)/3$, missä $I(0)$ on tähtijoukon keskustan pintakirkkaus.

$$M \approx 6\sigma_r^2 r_c / G$$

$$\frac{M}{L} \approx \frac{9}{2\pi} \frac{\sigma_r^2}{GI(0)r_c}$$



Viriaalteoreeman sovelluksia II

Table 3.1 Dynamical quantities for globular and open clusters in the Milky Way

Cluster		σ_r (km s ⁻¹)	$\log_{10} \rho_c$ ($\mathcal{M}_\odot \text{pc}^{-3}$)	r_c (pc)	$t_{\text{relax},c}$ (Myr)	Mass ($10^3 \mathcal{M}_\odot$)	\mathcal{M}/L_V ($\mathcal{M}_\odot/L_\odot$)
NGC 5139	ω Cen	20	3.1	4	5000	2600	2.5
NGC 104	47 Tuc	11	4.9	0.7	50	800	1.5
NGC 7078	M15	12	>7	<0.1	<1	900	2
NGC 6341	M92	5	5.2	0.5	2	200	1
NGC 6121	M4	4	4–5	0.5	30	60	1
	Pal 13	~0.8	2	1.7	10	3	3–7
NGC 1049	Fornax 3	9	3.5	1.6	600	400	~3
Open cluster	Pleiades	0.5	0.5	3	100	0.8	0.2

Note: σ_r is the dispersion in radial velocity V_r in the cluster core; ρ_c is central density; $t_{\text{relax},c}$ is the relaxation time at the cluster's center found using Equation 3.55 with $V = \sqrt{3}\sigma_r$, $\langle m_* \rangle = 0.3\mathcal{M}_\odot$, and $\Lambda = r_c/1 \text{ AU}$. Clusters with upper limits to r_c probably have collapsed cores.

- Pallomaisissa tähtijoukoissa ei ole juurikaan pimeää ainetta $M/L \approx 1-4$.
- Muuttumattomassa potentiaalissa voimme laskea jokaisen tähden nopeuden viriaalteoreemasta. Suuret nopeudet viittaavat suuren massakeskittymään:

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \langle \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \rangle$$



3.3 Kahden kappaleen vuorovaikutukset

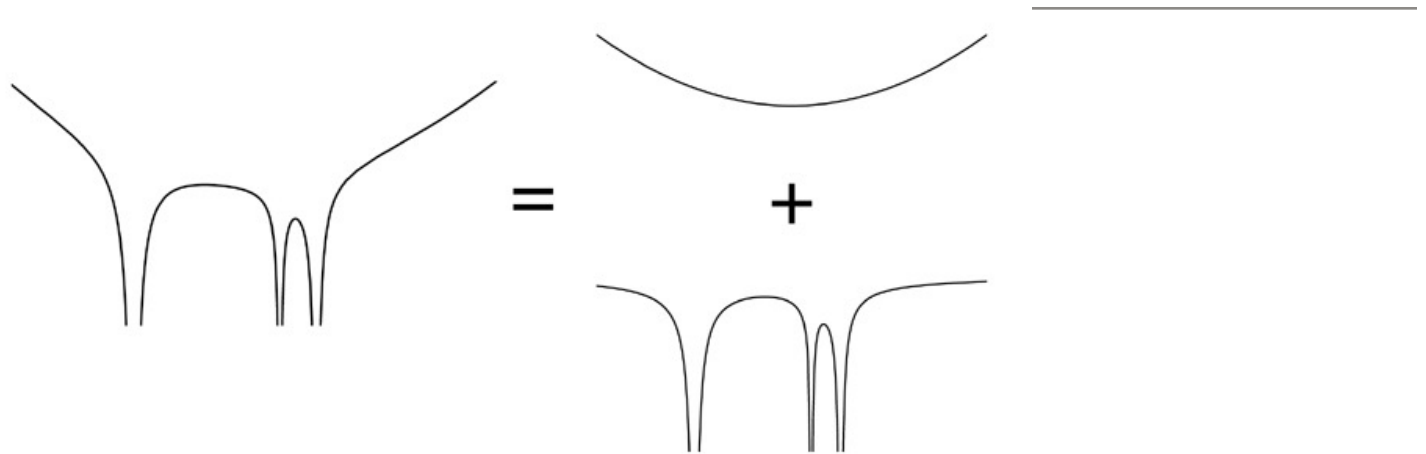


Fig 3.3 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007

- Galaksin painovoimapotentiaali on kahden komponentin summa, sileän yhteiskomponentin joka on keskiarvo monen tähden potentiaalista sekä yksittäisten tähtien aiheuttamista syvistä potentiaalikuopista.
- Tähtien liikkussa galaksissa yhteiskomponentti on tärkeämpi!



Vahvat vuorovaikutukset

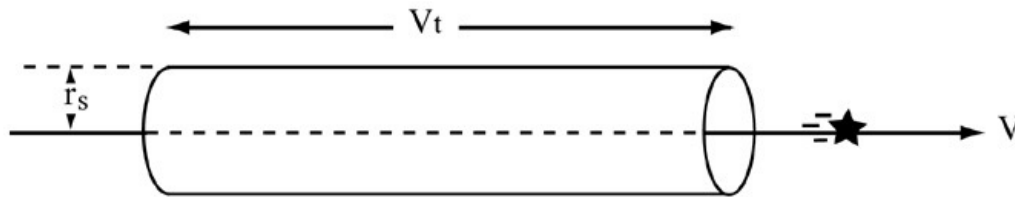


Fig 3.4 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP2007

- Vahvassa vuorovaikutuksessa tähtien potentiaalienergia muuttuu vähintään yhtä paljon kuin tähtien alkuperäiset kineettiset energiat olivat ennen vuorovaikutusta:

- $r_s = 1 \text{ AU}$ ($V \approx 30 \text{ km/s}$ ja $m = 0.5 M_\odot$). $\frac{Gm^2}{r} \gtrsim \frac{mV^2}{2}$, $r \lesssim r_s = \frac{2Gm}{V^2}$

- Tähti liikkuu tilavuuden $\text{Volume} = \pi r_s^2 V t$ läpi ja jos tähtitiheys on n törmäyksiä tapahtuu keskimäärin hyvin harvoin, eli yksi ajassa

$$n \pi r_s^2 V t = 1$$

$$t_s = \frac{V^3}{4\pi G^2 m^2 n} \approx 4 \times 10^{12} \text{ yr} \left(\frac{V}{10 \text{ kms}^{-1}} \right)^3 \left(\frac{m}{M_\odot} \right)^{-2} \left(\frac{n}{1 \text{ pc}^{-3}} \right)^{-1}$$



Heikot kaukaiset vuorovaikutukset I

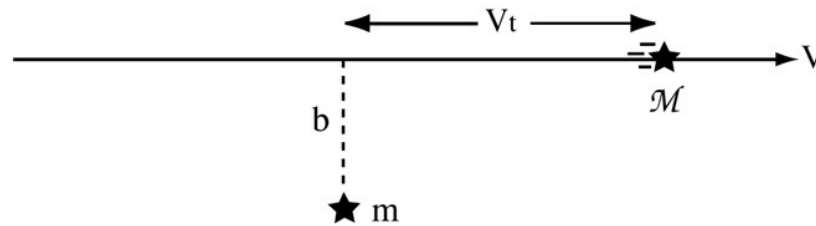


Fig 3.5 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007

- Heikoissa kaukaisissa vuorovaikutuksissa tähden liike muuttuu hyvin vähän ja voimme käyttää impulssiapproksimaatiota:

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{GmMb}{(b^2 + V^2t^2)^{3/2}} = M \frac{dV_{\perp}}{dt} \Rightarrow \Delta V_{\perp} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{\perp}(t) dt = \frac{2Gm}{bV}$$

- Mitä nopeammin tähti liikkuu sitä pienempi vaikutus nopeuden muutoksella on. Rata muuttuu kulman α verran:
- $$\alpha = \frac{\Delta V_{\perp}}{V} = \frac{2Gm}{bV^2}$$



Heikot kaukaiset vuorovaikutukset II

- Impulssiapproksimaatio on vain voimassa heikossa vuorovaikutuksessa, eli kun $b \gg r_s$, tai tarkemmin.

$$b \gg \frac{2G(m + M)}{V^2}$$

- Kun tähti liikkuu galaksissa monet eri tähdet muuttavat sen liikettä mutta eri suuntiin. Ajassa t , tähtien määrä jolla on massa m ja jotka ohittavat tähden M etäisyyksillä b ja $b+db$ välissä on niiden numerotiheyden n ja tilavuuden $Vt \cdot 2\pi b db$ tulo. $\Delta V = 0$, mutta $\Delta V^2 \neq 0$.
- Integroimalla ΔV^2 :n pystysuora komponentti tilavuuden yli saamme:

$$\langle \Delta V_{\perp}^2 \rangle = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} n V t \left(\frac{2Gm}{bV} \right)^2 2\pi b db = \frac{8\pi G^2 m^2 n t}{V} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$



Relaksaatio-aika

- Tietyn ajan jälkeen pystysuoran suunnan nopeuden muutos on yhtä suuri kuin alkuperäinen nopeus ja tähden alkuperäisen radan “muisti” on kadonnut. Tätä aikaskaalaa kutsutaan **relaksaatio-ajaksi**:

$$t_{\text{relax}} = \frac{V^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln \Lambda} = \frac{t_s}{2 \ln \Lambda}$$
$$\approx \frac{2 \times 10^9 \text{ yr}}{\ln \Lambda} \left(\frac{V}{10 \text{ kms}^{-1}} \right)^3 \left(\frac{m}{M_{\odot}} \right)^{-2} \left(\frac{n}{10^3 \text{ pc}^{-3}} \right)^{-1}$$

- Olemme määritelleet $\Lambda = (b_{\text{max}}/b_{\text{min}})$, missä $b_{\text{min}} = r_s \sim 1 \text{ AU}$ ja $b_{\text{max}} \sim 300 \text{ pc}$ – 30 kpc (riippuen järjestelmän koosta), eli $\ln \Lambda = 18$ – 22 .
- Auringon ympäristössä $t_{\text{relax}} \approx 10^{13}$ vuotta, eli tähdet liikkuvat sileässä yhteiskomponentin potentiaalissa.



Mitä opimme?

1. Tähtien liikettä voidaan kuvata Newtonin painovoimallailla.
2. Poissonin yhtälö on galaksidynamiikan tärkein yhtälö, joka yhdistää painovoimapotentialin tiheys/massa-jakaumaan.
3. Viriaaliteoreema on galaksidynamiikan peruskaava jota käyttäen voi arvioida monien eri kohteiden massoja.
4. Vahvat vuorovaikutukset kahden tähden välillä ovat hyvin harvinaisia: $t_s \sim 10^{15}$ vuotta.
5. Heikot vuorovaikutukset ovat jatkuva prosessi ja tähtien liikkeeseen vaikuttavat kaikkien muiden tähtien yhteinen gravitaatiopotentiaali. Silti Linnunradassa Auringon lähellä $t_{\text{relax}} \sim 10^{13}$ vuotta \gg galaksin ikä. Täten, tähdet liikkuvat galaksin sileässä yhteispotentiaalissa.