Galaksit ja kosmologia FYS2052, 5 op, syksy 2023

E207 Physicum

Luento 13: Galaksien synty ja kehitys

04/12/2023

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita I

- **Kalvo 3:** Inflaatioteoria ennustaa, että kvanttifluktuaatiot inflaton-kentässä ovat gaussisesti jakautuneet ja lähes skaalasta riippumattomat. Eli kaikilla pituusskaaloilla on lähes yhtä paljon tehoa. CMB-havainnot ovat osoittaneet, että näin todellakin on, eli fluktuaatioissa ei ole havaittu merkkejä ei-gaussisuudesta.
- **Kalvo 4:** Kaasun liikettä painovoimakentässä voidaan kuvata seuraavilla perusyhtälöillä:
  1) jatkuvuusyhtälöllä, 2) liikeyhtälö (Eulerin yhtälö) ja
  3) Poissonin yhtälö (kts. luennot 3 ja 4).

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita II

- **Kalvo 5:** Häiriöanalyysissä näihin yhtälöihin tehdään pieniä lineaarisia ensimmäinen kertaluvun häiriöitä, eli:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \delta\bar{v} \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho \quad p = p_0 + \delta p \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi$$

- **Kalvo 5:** Johdetaan yksityiskohtaisesti häiritty jatkuvuusyhtälö:

$$\frac{d(\rho_0 + \delta\rho)}{dt} = -(\rho_0 + \delta\rho)\nabla \cdot (\vec{v}_0 + \delta\vec{v})$$

$$\frac{d\rho_0}{dt} + \frac{\delta\rho}{dt} = -\rho_0\nabla \cdot \vec{v}_0 - \rho_0\nabla \cdot \delta\vec{v} - \delta\rho\nabla \cdot \vec{v}_0 - \delta\rho\nabla \cdot \delta\vec{v}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita III

- **Kalvo 5:** Toisen kertaluvun häiriö-termit (eli ~δ^2) voidaan laittaa nollaan, lisäksi yhtälöstä vähennetään staattinen ratkaisu:

$$\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\rho}{dt} = -\rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} - \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0$$

- **Kalvo 5:** Seuraavaksi tehdään sijoitus $\Delta=\delta\rho/\rho_0$, missä Δ on normeerattu tiheyshäiriö, eli tiheyshäiriö jaettuna taustatiheydellä (eli keskitiheydellä).

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IV

- **Kalvo 5:** Häiritty yhtälö Δ:n avulla lausuttuna:

$$\Rightarrow \frac{d(\Delta\rho_0)}{dt} = -\rho_0\nabla\cdot\delta\vec{v} - \rho_0\Delta\nabla\cdot\vec{v}_0$$

$$\Rightarrow \rho_0\frac{d\Delta}{dt} + \Delta\frac{d\rho_0}{dt} = -\rho_0\nabla\cdot\delta\vec{v} - \rho_0\Delta\nabla\cdot\vec{v}_0$$

- **Kalvo 5:** Lopuksi vähennetään vielä kertaalleen staattinen ratkaisu ja jaetaan ρ_0:lla.

$$\Delta\left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0\nabla\cdot\vec{v}_0\right) = 0$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita V

- **Kalvo 5:** Lopulta saamme häirityn jatkuvuusyhtälön:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) = \frac{d\Delta}{dt} = -\nabla \cdot \delta\bar{v}$$

- **Kalvo 5:** Samalla tavalla voimme johtaa myös häirityn Euler-yhtälön ja häirityn Poisson yhtälön:

$$\frac{d(\delta\bar{v})}{dt} + (\delta\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\delta p - \nabla\delta\phi$$

$$\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VI

- **Kalvo 6:** Laajenevassa maailmankaikkeudessa nopeus voidaan lausua, missä etäisyys **x**=a**r**, a=mittakaavatekijä ja käytetään lyhennettä **u**=d**r**/dt

$$\bar{v} = \frac{da}{dt}\bar{r} + a(t)\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_0 + \delta\bar{v}, \quad \delta\bar{v} = a\bar{u}$$

- **Kalvo 6:** Siirrytään mukana-laajeneviin derivaattoihin, missä alaindeksi ”c” tarkoittaa co-moving:

$$\nabla \rightarrow \frac{1}{a}\nabla_c$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VII

- **Kalvo 7:** Häiritty Euler-yhtälö saadaan nyt muotoon:

$$\vec{u}\frac{da}{dt} + a\frac{d\vec{u}}{dt} + \dot{a}\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0 a^2}\nabla_c \delta p - \frac{1}{a^2}\nabla_c \delta\phi$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\bar{u} = -\frac{1}{\rho_0 a^2}\nabla_c \delta p - \frac{1}{a^2}\nabla_c \delta\phi$$

- **Kalvo 7:** Otetaan seuraavaksi divergenssi tästä yhtälöstä, eli pistetulo nablan kanssa:

$$\nabla_c \cdot \dot{\bar{u}} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\nabla_c \cdot \bar{u} = -\frac{c_s^2}{\rho_0 a^2}\nabla_c^2(\delta\rho) - \frac{1}{a^2}\nabla_c^2(\delta\phi)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita VIII

- **Kalvo 7:** Ottamalla lopuksi vielä aikaderivaatta häiritystä jatkuvuusyhtälöstä :

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = -\nabla_c \cdot \dot{\bar{u}}$$

- **Kalvo 8:** Saadaan johdettua yhtälö pienille tiheyshäiriöille:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = \frac{c_s^2}{\rho_0 a^2}\nabla_c^2 \delta\rho + 4\pi G \delta\rho$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita IX

- **Kalvo 8:** Tehdään vielä aaltoyrite $\Delta \propto e^{i(\vec{k}_c \cdot \vec{r} - \omega t)}$, jolloin yhtälön oikea puoli saadaan muotoon ($\mathbf{k}_c$=$\mathbf{k}a$):

$$\frac{c_s^2}{\rho_0 a^2}(i)^2 k^2 a^2 \Delta\rho_0 + 4\pi G \Delta\rho_0 = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2)$$

- **Kalvo 9:** Staattisessa tapauksessa maailmankaikkeus ei laajene ja yhtälö yksinkertaistuu muotoon, joka voidaan ratkaista helposti eksponentiaali-yritteellä:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = \Delta(4\pi G\rho_0 - k^2 c_s^2)$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita X

- **Kalvo 9:** Yhtälön oikean puoleisesta dispersiorelaatiosta voidaan ratkaista Jeansin aaltovektori ja Jeansin pituus:

$$c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0 = 0 \quad \Rightarrow k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2} \quad \Rightarrow \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2}$$

- **Kalvo 9:** Jeansin massa on λ_J-säteisen pallon sisään jäävä massa:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \rho_m = \frac{\pi}{6}\lambda_J^3 \rho_m$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XI

- **Kalvo 11:** Laajenevassa maailmankaikkeudessa saamme massiivisille häiriölle (terminen paine termi voidaan unohtaa):

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{d\Delta}{dt} = 4\pi G\rho\Delta$$

- **Kalvo 11:** Laakealle Ω_m=1 mallille termit voidaan johtaa:

$$a = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}, \quad \dot{a} = \left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3}\frac{2}{3}t^{-1/3} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

$$4\pi G\rho = 4\pi G\frac{3H_0^2}{8\pi G}a^{-3} = \frac{4\cdot 3H_0^2}{8}\cdot\left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{-2} = \frac{2}{3t^2}$$

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XII

- **Kalvo 12:** Laajenevassa maailmankaikkeudessa tiheyshäiriöiden lineaarinen kasvu on hidasta:

$$\Delta \propto t^{2/3} \propto a = (1+z)^{-1}$$

- **Kalvo 14:** Ennen CMB:n syntyä aine ja säteily on tiukasti sidottuna toisiinsa Thomson sironnan kautta. Kaasun efektiivinen äänennopeus oli silloin valtavan suuri, eli $c/\sqrt{3}$, missä c on valonnopeus tyhjiössä. Kun CMB syntyy säteily kytkeytyy irti aineesta ja Jeansin massan arvo putoaa tekijällä ~10^{10}. Rakenteen muodostus voi nyt alkaa.

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIII

- **Kalvo 16:** Hyvin varhaisessa maailmankaikkeudessa pimeän energian suhteellinen osuus oli hyvin pieni ja sillä ei ollut käytännön merkitystä galaksien muodostumisessa.
- **Kalvo 17:** Pienten tiheyshäiriöiden lineaarinen kasvukaava on vain voimassa kun $\Delta<1$, kun $\Delta>1$ tapahtuu verrattain nopea epä-lineaarinen romahdus galaksit voivat saavuttaa $\Delta \sim 10^6$ verrattain lyhyessä ajassa.
- **Kalvo 18:** Kaasu jäähtyminen ja tähtien synty on ratkaisevan tärkeää galaksin näkyvien osien synnyn kannalta. Pimeä aine ei voi jäähtyä ja se jää diffuusiksi laajaksi haloksi verrattuna baryoniseen aineeseen, joka keskittyy galaksin keskiosiin.

Selventävä lisämateriaali ja laskujen välivaiheita XIV

- **Kalvo 20:** Galaksien massafunktio poikkeaa merkittävästi pimeän aineen massafunktiosta, varsinkin hyvin pienillä ja hyvin suurilla massoilla. Syynä on erilaiset feedback-prosessit, jotka vaikeuttavat kaasun jäähtymistä ja tähtien syntyä galakseissa.
- **Kalvo 22:** Alaindeksi BP kaavassa tulee englannin sanoista ”band pass”, eli kaista.
- **Kalvo 24:** Havainnot vastaavat pitkälti galaksien synnyn standarditeoriaa, eli kaukaisimmat galaksit ovat pieniä ja epäsäännöllisiä. Säännöllisiä suuria spiraali- ja ellipsigalakseja esiintyy matalimmilla punasiirtymillä (z<2-4).